



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE TECNOLOGIA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA - PPGE**

**INCLUSÃO DO MEIO UPML NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO
DOMÍNIO DO TEMPO APLICADO AO ELETROMAGNETISMO**

Mestrando: Marcelo de Souza

Orientador: Professor Wilson Arnaldo Artuzi Júnior, PhD.

**CURITIBA
SETEMBRO 2008**

MARCELO DE SOUZA

**INCLUSÃO DO MEIO UPML NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO
DOMÍNIO DO TEMPO APLICADO AO ELETROMAGNETISMO**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná – UFPR. Orientador: Professor Wilson Arnaldo Artuzi Júnior, PhD.

**CURITIBA
SETEMBRO 2008**

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo o que tem proporcionado e colocado em meu caminho nesta vida.

Agradeço aos meus pais, familiares, amigos e namorada, pelo apoio e incentivo constantes.

Agradeço ao Prof. Dr. Wilson A. Artuzi Jr., por todo o seu auxílio, empenho, dedicação e paciência como orientador.

Agradeço banca de avaliação, por suas valiosas sugestões para a melhoria da apresentação dos resultados deste trabalho.

Agradeço todos os professores do Departamento de Engenharia Elétrica da UFPR pelos ensinamentos e pelas palavras de motivação,

Agradeço do fundo do coração a todos que, direta ou indiretamente, tiveram influência nesta etapa da minha vida e no presente trabalho.

OBRIGADO!

Marcelo de Souza

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	LIMITAÇÃO DE ESPAÇO COMPUTACIONAL.....	2
1.2	PROPOSTA	3
1.3	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	4
2	O MEIO PML.....	4
2.1	ONDA PLANA INCIDENTE SOBRE O SEMI-ESPAÇO COM PERDAS.....	4
2.2	UM MEIO ABSORVENTE PML ANISOTRÓPICO.....	5
2.2.1.1	FORMULAÇÃO TEÓRICA	6
2.2.2	EQUAÇÃO VETORIAL DA ONDA PARA O MEIO PML	10
2.3	DESEMPENHO TEÓRICO DO MEIO PML	11
2.3.1	O ESPAÇO CONTÍNUO	11
2.3.2	O ESPAÇO DISCRETO	12
2.3.2.1	VARIAÇÃO GRADUAL DOS PARÂMETROS DO MEIO PML	12
2.3.2.2	ERRO DE DISCRETIZAÇÃO	13
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO	14
3.1	INTRODUÇÃO	14
3.2	DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS.....	15
3.3	MÉTODO DE GALERKIN.....	18
3.4	EQUAÇÃO MATRICIAL DA ONDA	20
3.5	MEIOS DISPERSIVOS.....	21
3.6	PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO.....	22
3.7	O MEIO PML	23
4	SIMULAÇÕES E RESULTADOS.....	24
4.1	INTRODUÇÃO	24
4.2	GUIA DE ONDA METÁLICO	25
4.2.1	MODO TE_{10}	26
4.2.2	FONTE DE EXCITAÇÃO.....	29
4.2.3	AMOSTRAGEM DO CAMPO ELÉTRICO	29
4.2.4	CÁLCULO DO COEFICIENTE DE REFLEXÃO	30
4.2.5	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	31
4.3	GUIA DE ONDA DUAL.....	38
4.3.1	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	39

5	CONCLUSÃO	41
	PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS.....	43
	REFERÊNCIAS	44

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Limitação do espaço computacional simulando espaço livre	2
Figura 2.1 – Onda incidindo da região 1 para a região 2 com ângulo θ	5
Figura 2.2 – Onda incidindo normalmente na interface das regiões 1 e 2	5
Figura 2.3 – Atenuação da onda incidindo com ângulo θ no meio PML	9
Figura 2.4 – Meio PML com contorno externo PEC.....	11
Figura 2.5 – a) A variação abrupta da condutividade faz com que haja muita reflexão, reduzindo o desempenho do meio PML. b) A variação gradual da condutividade reduz as reflexões o desempenho.....	12
Figura 3.1 – a) Estrutura bidimensional mostrando o domínio e o contorno b) Malha de discretização espacial	16
Figura 3.2 – Estrutura tridimensional discretizada espacialmente.	16
Figura 3.3 – Elemento tetraédrico	17
Figura 3.4 – Coordenadas locais do elemento de discretização	17
Figura 4.1 – Guia de onda físico WR112 utilizado como base para a estrutura simulada	25
Figura 4.2 – Simetrias elétrica e magnética encontradas no guia de ondas.....	26
Figura 4.3 – Cortes transversal (a) e longitudinal (b) da estrutura simulada	26
Figura 4.4 – Campos elétrico e magnético do modo TE_{10}	27
Figura 4.5 – Decomposição do modo TE_{10} em duas ondas planas.....	28
Figura 4.6 – Fonte de excitação no tempo e na frequência	29
Figura 4.7 – Ângulo de incidência vs. frequência para o modo TE_{10}	29
Figura 4.8 – Planos de amostragem.....	30
Figura 4.9 – Formato teórico do campo elétrico no modo TE_{10}	30
Figura 4.10 – Posição dos planos de medição usados para o cálculo do coeficiente de reflexão	31
Figura 4.11 – Obtenção de k_{opt} a) coeficiente de reflexão para os diversos valores de k_{max} com $L/\Delta L = 4$, $m = 2$ e $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$ b) perfil de variação do coeficiente de reflexão x k_{max}	32
Figura 4.12 – k_{opt} x $L/\Delta L$, simulados e aproximados por equação empírica $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$	33
Figura 4.13 – Efeito do refinamento da malha na simulação, com $L = 16$, $m = 3$, $k_{max} = k_{opt}$, $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$	34
Figura 4.14 – Variação do grau do polinômio na gradação, com $L = 8$, $k_{max} = k_{opt}$ (7, 8 e 10 para $m = 2, 3$ e 4), $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$	35

Figura 4.15 – Desempenho com a variação da condutividade máxima (σ_{max}) na distribuição, com $L/\Delta L = 2$, $m = 2$ e $k_{max} = 4$	35
Figura 4.16 – Coeficiente de reflexão para os diferentes comprimentos do meio PML terminado com PEC $m=2$, $k_{max}=k_{opt}$ e $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$	36
Figura 4.17 – Terminação do meio PML.....	37
Figura 4.18 – Γ x f para as 3 terminações com $L/\Delta L = 2$ e 8 $m=2$, $k_{max}=k_{opt}$ e $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$	37
Figura 4.19 – Efeito do número de camadas no desempenho do meio PML, com $m = 2$, $k_{max} = k_{opt}$, $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$, e comparativo com a terminação em ABC.	38
Figura 4.20 – Condições de contorno dos modos TE_{10} e TM_{10}	38
Figura 4.21 – Guia de onda dual simulado, posição da fonte alterado para excitar o modo TM_{10}	39
Figura 4.22 – Campo elétrico do guia metálico e campo magnético do guia dual paralelos ao plano yz	39
Figura 4.23 – k_{opt} x $L/\Delta L$, simulados e aproximados por equação empírica	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Valor de R_S para algumas condições de contorno	20
Tabela 4.1 – Características de um guia de ondas WR112.....	25
Tabela 4.2 – Características do ambiente de simulação	32
Tabela 4.3 – Efeito do refinamento da malha de discretização no desempenho e tempo de processamento	34

LISTA DE SIGLAS

PML	camada de perfeito casamento de impedância (<i>perfect matched layer</i>)
UPML	camada de perfeito casamento de impedância uniaxial (<i>uniaxial perfect matched layer</i>)
PEC	condutor elétrico perfeito (<i>perfect electric conductor</i>)
PMC	condutor magnético perfeito (<i>perfect magnetic conductor</i>)
ABC	condição de contorno absorvente (<i>absorbing boundary condition</i>)
FEM	método dos elementos finitos (<i>finite element method</i>)
FDTD	diferenças finitas no domínio do tempo (<i>finite difference element time domain</i>)
FETD	elementos finitos no domínio do tempo (<i>finite element time domain</i>)
MoM	método dos momentos (<i>method of moments</i>)
FEFD	Elementos finitos no domínio da frequência (<i>finite element frequency domain</i>)

LISTA DE SIMBOLOS

ϵ	Permissividade elétrica
σ	Condutividade elétrica
μ	Permeabilidade magnética
ϵ_r	Permissividade relativa
\vec{E}	Vetor campo elétrico
\vec{J}	Vetor densidade de corrente elétrica
\vec{H}	Vetor campo magnético
Ω	Domínio
$\partial\Omega$	Contorno do domínio
\vec{L}_{ij}	Aresta vetorial
v_{ij}	Diferença de potencial entre os pontos i e j
λ_{ij}	Coordenadas local do elemento de discretização espacial
$\nabla\lambda_{ij}$	Gradiente da coordena local $_{i,j}\lambda$
\vec{W}_m	Função de teste
Ω_C	Condição de contorno
v_n	Diferença de potencial no instante de tempo discreto $t = n\Delta t$
ΔL	Comprimento médio da aresta de discretização
Δt	Passo do tempo discreto
t	Tempo contínuo
f	Frequência
ω	Frequência angular
s	Frequência complexa
η	Impedância intrínseca do ar (377Ω)
V	Volume
S	Superfície de contorno
x,y,z	Coordenadas cartesianas
\hat{n}	Versor normal
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	Vetor unitário

κ	Escalonamento de coordenada
α	Deslocamento da frequência complexa
m	Grau do polinômio de gradação de σ e k
Γ	Coeficiente de reflexão
τ	Coeficiente de transmissão
β	Constante de fase
θ	Ângulo de incidência em relação a normal ao plano
j	Operador complexo
k_0	Número de onda

RESUMO

Esta dissertação trata da formulação e implementação de um meio absorvente perfeitamente casado (UPML) no método numérico de análise eletromagnética por elementos finitos no domínio do tempo. A formulação proposta neste trabalho trata da dependência da frequência usando pólos e resíduos e aplica a transformação bilinear para garantir a estabilidade numérica. Além disso, a eficiência computacional do algoritmo é otimizada ao se utilizar apenas três pólos de valores constantes, sendo um na origem e outros dois de valores reais negativos. A variação gradual da absorção é obtida através da correspondente variação dos resíduos, sem alterar os valores dos pólos. São realizadas simulações para validar a formulação e verificados a influência dos diversos parâmetros no desempenho da formulação. A estabilidade numérica é mantida nesta formulação, assim como o bom desempenho computacional e capacidade de absorção das ondas eletromagnéticas.

ABSTRACT

This work concerns with the formulation and implementation of an absorbing medium, the uniaxial perfect mached layer (UPML), in the FETD (finite element time domain) method. The formulation proposed in this paper addresses the dependence of the frequency using poles and waste and applies the bilinear transformation to ensure numerical stability. Moreover, the efficiency of computational algorithm is optimized by using only three poles of constant values, one in origin and other two of negative real values. The gradual change of absorption is obtained through the corresponding variation of waste, without changing the values of poles. Simulations are executed to validate the formulation and check the influence of various parameters in the performance of the formulation. The numerical stability is maintained in this formulation, as well as the computational performance and capacity for absorption of electromagnetic waves.

1 INTRODUÇÃO

As equações de Maxwell da eletrodinâmica, formuladas nos anos 1870, representam uma unificação fundamental dos campos elétricos e magnéticos prevendo o fenômeno da onda eletromagnética que o prêmio Nobel Richard Feynman chamou de feito mais importante da ciência do século XIX. Hoje cientistas e engenheiros no mundo todo usam computadores que vão desde simples computadores pessoais até supercomputadores para obter soluções para estas equações com o propósito de investigar as ondas eletromagnéticas guiadas, irradiação, fenômenos do espalhamento e outras tecnologias. Pode parecer meio estranho, no século XXI, gastar-se tanto esforço para resolver as mais famosas equações do século XIX. Então perguntamos: “Qual a relevância que a solução das equações de Maxwell tem para a sociedade moderna?” [1].

As soluções numéricas das equações de Maxwell ajudam a inovar e a projetar tecnologias-chaves da engenharia elétrica desde telefones celulares e computadores até lasers e circuitos fotônicos. Enquanto, inicialmente, a solução das equações de Maxwell foi impulsionada por requerimentos militares, hoje todo o campo da eletrodinâmica computacional está rapidamente se direcionando para importantes aplicações comerciais como comunicações de alta velocidade e à informática que vão chegar a todas as pessoas em seus dias-a-dias. Finalmente, isso fornecerá o bem-estar econômico e a segurança militar das nações. É neste contexto, de grandes avanços na tecnologia da engenharia elétrica devido à habilidade de resolver de forma rápida e exata as equações de Maxwell, é que se encontram os métodos numéricos.

Dentre estes, destacam-se o método dos momentos (MoM – *method of moments*), o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD – *finite difference time-domain*) e o método dos elementos finitos nos domínios da frequência (FEFD – *finite element frequency-domain*) e do tempo (FETD – *finite element time-domain*).

O método MoM apresenta boa eficiência computacional para tratar meios homogêneos e estruturas abertas, porém, torna-se de difícil generalização quando a estrutura é composta por meios distintos e de geometria genérica.

O método FDTD discretiza o espaço computacional através de uma malha hexaédrica ortogonal (porém, em alguns casos pode ser utilizada malha conformacional [2]) e resolve o problema no domínio do tempo. Os meios podem ser não homogêneos, porém, o domínio computacional deve ser fechado. Este método consagrou-se pelo fato de resultar em um

sistema de equações lineares explícito, ou seja, a matriz de coeficientes é diagonal e sua solução é trivial, porém o método apresenta limitação do valor máximo do passo no tempo.

O método dos elementos finitos (FEM – *finite element method*) utiliza malhas não estruturadas que, na sua forma mais simples, discretizam o espaço através de tetraedros permitindo a modelagem de estruturas geométricas mais genéricas e complexas. O espaço computacional é fechado e o método pode ser resolvido nos domínios da frequência e do tempo. A vantagem de se utilizar o FEM no domínio do tempo (FETD) é a possibilidade da simulação de uma ampla faixa de frequências numa única execução do programa. O tratamento de materiais e dispositivos não lineares torna-se mais prático e eficiente neste tipo de formulação.

Neste trabalho, será abordado o método FETD incondicionalmente estável, ou seja, que não apresenta restrição quanto ao valor do passo do tempo.

1.1 LIMITAÇÃO DE ESPAÇO COMPUTACIONAL

Uma consideração básica sobre qualquer um dos métodos numéricos utilizados para resolver problemas de interação de ondas eletromagnéticas é que muitas geometrias de interesse são definidas em regiões abertas, onde o domínio espacial do campo calculado é ilimitado em uma ou mais direções. Claramente, nenhum computador pode armazenar uma quantidade ilimitada de dados, e assim, o domínio computacional deve ser limitado em tamanho. O domínio computacional deve ser grande o suficiente para conter a estrutura de interesse, e uma condição de contorno deve ser utilizada para simular a sua extensão ao infinito [1]. Uma condição de contorno arbitrária e inadequada causaria reflexões indesejáveis da onda eletromagnética incidente no contorno, que por sua vez, seriam traduzidas como erro no resultado da simulação.

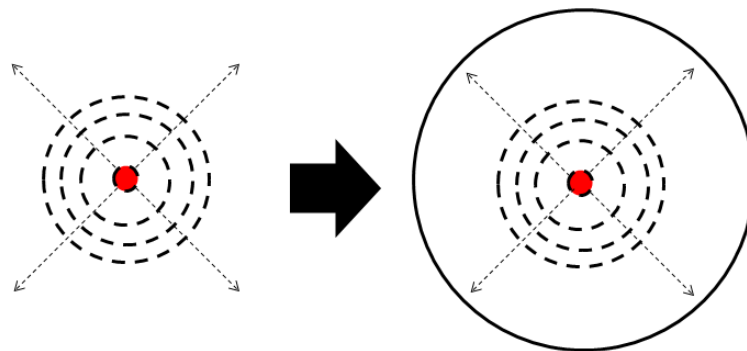


Figura 1.1 – Limitação do espaço computacional simulando espaço livre

A condição de contorno de absorção (ABC – *absorbing boundary condition*) de primeira ordem é de simples implementação e pode ser introduzida na malha de contorno externa para simular sua extensão ao infinito, porém sua formulação matemática requer que as ondas incidam perpendicularmente sobre a superfície que a contém. Um modo alternativo à ABC é usar um meio material absorvente, isto é análogo ao tratamento físico utilizado nas paredes de câmaras anecóicas. Idealmente, o meio absorvente deveria possuir uma espessura de poucas arestas da malha do espaço computacional, sendo irreflexivo a qualquer onda incidente sobre todo seu espectro de frequência, altamente absorvente e eficiente na região de campo próximo ou de campo distante.

Uma grande contribuição para esta área ocorreu em 1994, quando Berenger [3] introduziu a formulação de um meio altamente absorvente para uso no método. Berenger chamou o meio absorvente de camada de absorção com casamento perfeito (PML – *perfect matched layer*). A formulação proposta se baseava em um modelo puramente matemático, e não físico, que permitia que ondas planas com arbitrários ângulos de incidência, polarização e frequência fossem completamente casadas e absorvidas pelo meio.

Em contrapartida ao modelo proposto por Berenger, um modelo físico, baseado em um meio anisotrópico uniaxial perfeitamente casado, foi proposto por Sacks et al. [4]. Este meio apresenta comportamento tão bom quanto o de Berenger sendo ainda realizável na prática.

Várias pesquisas com relação a meios PML foram desenvolvidas desde então, a maioria delas ligada ao método FDTD. Investigações também foram realizadas no método dos elementos finitos no domínio da frequência (FEFD – *finite element frequency domain*) e recentemente no método FETD [5].

1.2 PROPOSTA

A proposta deste trabalho é desenvolver a técnica do meio PML Uniaxial, ou UPML, e incluí-la no método FETD baseado na formulação proposta em [6], sem causar instabilidade numérica, e validar esta formulação a partir da simulação de guias de onda retangulares.

Ao contrário das demais formulações encontradas na literatura [5] [7] [8] [9], a abordagem deste trabalho trata da dependência da frequência usando pólos e resíduos e aplica a transformação bilinear para garantir a estabilidade numérica. Além disso, a eficiência computacional do algoritmo é otimizada ao se utilizar apenas três pólos de valores constantes,

sendo um na origem e outros dois de valores reais negativos. A variação gradual da absorção é obtida através da correspondente variação dos resíduos, sem alterar os valores dos pólos.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O capítulo 2 trata da formulação teórica do meio UPML, suas vantagens e dificuldades frente às outras técnicas.

O capítulo 3 trata da formulação do método FETD a partir da equação vetorial da onda eletromagnética para o campo elétrico. São descritas as definições geométricas para a discretização espacial e os métodos usados para a discretização temporal desta equação, transformando-a em um conjunto de equações numéricas matriciais recursivas que formam a base do método FETD. Também são analisadas as condições de contorno concernentes ao método adotado.

No capítulo 4 a formulação apresentada é validada a partir da simulação numérica do método FETD de dois problemas, ambos utilizando guias de onda retangulares.

As conclusões e propostas para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 5.

2 O MEIO PML

2.1 ONDA PLANA INCIDENTE SOBRE O SEMI-ESPAÇO COM PERDAS

Para estabelecer uma fundamentação para nossa discussão sobre absorvedores PML, esta seção mostra os princípios físicos que descrevem uma onda plana senoidal incidindo sobre um material com perdas, com ângulo arbitrário θ relativo ao eixo x . Especificamente, considerando uma onda polarizada TE_z incidente da região 1, o material sem perdas do semi-espaço $x < 0$, para a região 2 o material do semi-espaço $x > 0$ possuindo condutividade elétrica σ como mostra a Figura 2.1.

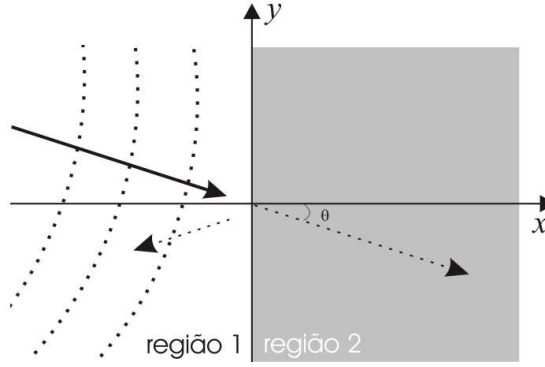


Figura 2.1 – Onda incidindo da região 1 para a região 2 com ângulo θ

Em geral, o sistema apresenta coeficiente de reflexão $\Gamma \neq 0$ para o ângulo arbitrário de incidência θ . Porém, o caso especial de incidência normal ($\theta = 0$) da onda implica em $\Gamma = 0$, ou seja, uma interface sem reflexão entre as regiões 1 e 2 para a onda incidindo normalmente.

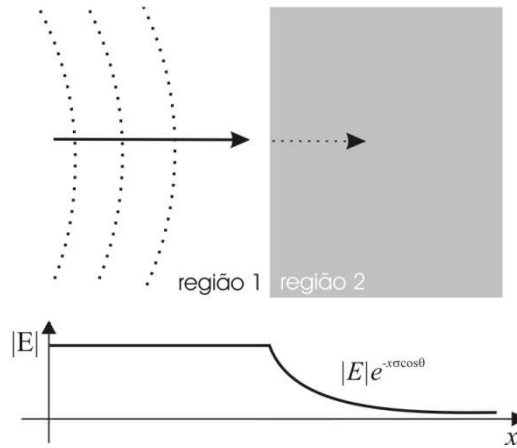


Figura 2.2 – Onda incidindo normalmente na interface das regiões 1 e 2

Observa-se na Figura 2.2 que, para o caso da incidência normal, a onda transmitida para região 2 é atenuada exponencialmente enquanto se propaga. Além disso, apesar de se propagar em um meio com perdas esta onda não apresenta dispersão, ou seja, sua velocidade grupo é independente da frequência. Assim, a região 2 do semi-espço com perdas é perfeitamente casada à região 1 para ondas incidentes normalmente.

2.2 UM MEIO ABSORVENTE PML ANISOTRÓPICO

Quando a malha de contorno externa necessita simular extensão infinita, um meio material absorvente de ondas eletromagnéticas precisa ser empregado.

A fim de reproduzir o desempenho absorvedor apresentado pelo meio com perdas quando da incidência normal da onda eletromagnética, Berenger desenvolveu a formulação de um meio hipotético, porém neste, a absorção acontece independente do ângulo de incidência.

Esta formulação, conhecida como PML de campo particionado (*split-field*), separa cada componente vetorial de campo elétrico e magnético das equações de Maxwell em duas subcomponentes ortogonais [3]. Cada uma das 12 subcomponentes resultantes é então expressa satisfazendo um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas de primeira ordem. Ao se escolher os parâmetros de perdas de acordo com um meio sem dispersão, uma interface plana e perfeitamente absorvente é obtida.

O meio hipotético de Berenger apresenta dependência direcional dos termos de perda, ou seja, apresenta uma forma de anisotropia, o que levou a investigações em busca de um meio anisotrópico físico que reproduzisse este mesmo comportamento.

Aliás, um modelo físico baseado em um meio anisotrópico perfeitamente casado pode ser formulado. Isto foi primeiramente discutido por Sacks et al. [4]. Para uma única interface, o meio anisotrópico é uniaxial para ambos os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética. O material uniaxial se comporta tão bem quanto o PML de Berenger enquanto evita a divisão não física dos campos.

Uma proposta para realizar fisicamente um meio PML foi feita por Ziolkowski [10]. Este consistiria de um metamaterial artificial (*time derivative Lorentz material*). Materiais semelhantes estão sendo pesquisados e já demonstraram propriedades antes impensadas, como o índice de refração negativo que possibilitará a criação de super lentes (capazes de produzir imagens de objetos menores que o comprimento de onda da luz visível) em um futuro breve.

2.2.1.1 FORMULAÇÃO TEÓRICA

Considerando uma onda plana harmônica arbitrária no tempo

$$\vec{H} = \hat{z}H_0 e^{-j\beta_{1x}x - j\beta_{1y}y} \quad (1)$$

propagando na região 1, que é o semi-espço isotrópico em $x < 0$, assume-se que esta onda é incidente na região 2, o semi-espço $x > 0$, compreendido por um meio anisotrópico tendo os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética

$$\bar{\bar{\epsilon}}_2 = \epsilon_2 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad \bar{\bar{\mu}}_2 = \mu_2 \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad (2)$$

como mostrado na Figura 2.1. Onde, a, b, c e d são valores reais quaisquer.

Os campos excitados na região 2 são também ondas planas por natureza e satisfazem as equações de Maxwell. Assim, obtêm-se

$$\vec{\beta}_2 \times \vec{E} = \omega \bar{\bar{\mu}}_2 \vec{H} \quad \vec{\beta}_2 \times \vec{H} = -\omega \bar{\bar{\epsilon}}_2 \vec{E} \quad (3)$$

onde $\vec{\beta}_2 = \hat{x}\beta_{2x} + \hat{y}\beta_{2y}$, é a constante de fase na região anisotrópica 2 e $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular. Em contrapartida, isto permite a derivação da equação da onda

$$\vec{\beta}_2 \times (\bar{\bar{\epsilon}}_2^{-1} \vec{\beta}_2) \times \vec{H} + \omega^2 \bar{\bar{\mu}}_2 \vec{H} = 0 \quad (4)$$

Expressando os produtos vetoriais como operadores matriciais, esta equação de onda pode ser expressa como

$$\begin{bmatrix} k_2^2 c - (\beta_{2y})^2 b^{-1} & \beta_{2x} \beta_{2y} b^{-1} & 0 \\ \beta_{2x} \beta_{2y} b^{-1} & k_2^2 d - (\beta_{2x})^2 b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & k_2^2 d - (\beta_{2x})^2 a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

onde $k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2$. A relação de dispersão para o meio uniaxial na região 2 é obtida ao se igualar o determinante da matriz a zero. Resolvendo para β_{2x} , encontra-se a existência de quatro autovalores como soluções. Convenientemente, estas soluções podem ser desacopladas em modos TE_z e TM_z propagando para frente e para trás em relação à interface, o que satisfaz as relações de dispersão

$$k_2^2 - (\beta_{2x})^2 b^{-1} d^{-1} - (\beta_{2y})^2 a^{-1} d^{-1} = 0 \quad TE_z(H_x, H_y = 0) \quad (6)$$

$$k_2^2 - (\beta_{2x})^2 b^{-1} d^{-1} - (\beta_{2y})^2 b^{-1} c^{-1} = 0 \quad TM_z(H_z = 0) \quad (7)$$

O coeficiente de reflexão na interface $x = 0$ das regiões 1 e 2 pode agora ser encontrado. Assumindo uma onda TE_z incidente na região 1. Então, na região 1, isotrópica, os campos podem ser expressos como uma superposição dos campos incidente e refletido como

$$\vec{H}_1 = \hat{z} H_0 (1 + \Gamma e^{2j\beta_{1x}x}) e^{-j\beta_{1x}x - j\beta_{1y}y} \quad (8)$$

$$\vec{E}_1 = \left[-\hat{x} \frac{\beta_{1y}}{\omega \epsilon_1} (1 + \Gamma e^{2j\beta_{1x}x}) + \hat{y} \frac{\beta_{1x}}{\omega \epsilon_1} (1 - \Gamma e^{2j\beta_{1x}x}) \right] H_0 e^{-j\beta_{1x}x - j\beta_{1y}y} \quad (9)$$

A onda transmitida para a região 2 é também TE_z com características de propagação governadas por (6). Estes campos são expressos como

$$\vec{H}_2 = \hat{z} H_0 \tau e^{-j\beta_{2x}x - j\beta_{2y}y} \quad (10)$$

$$\vec{E}_2 = \left(-\hat{x} \frac{\beta_{2y}}{\omega \varepsilon_2 a} + \hat{y} \frac{\beta_{2x}}{\omega \varepsilon_2 b} \right) H_0 \tau e^{-j\beta_{2x}x - j\beta_{2y}y} \quad (11)$$

onde Γ e τ são os coeficientes de reflexão e transmissão do campo magnético, respectivamente. Estes são obtidos impondo a continuidade dos campos E e H tangenciais em $x = 0$, e são dados por

$$\Gamma = \frac{\beta_{1x} - \beta_{2x}b^{-1}}{\beta_{1x} + \beta_{2x}b^{-1}} \quad (12)$$

$$\tau = 1 + \Gamma = \frac{2\beta_{1x}}{\beta_{1x} + \beta_{1x}b^{-1}} \quad (13)$$

Além disso, para todos os ângulos de incidência tem-se

$$\beta_{2y} = \beta_{1y} \quad (14)$$

devido ao casamento de fase na interface $x = 0$. Substituindo (14) em (6) e resolvendo para β_{2y} tem-se

$$\beta_{2x} = \sqrt{k_2^2 bd - (\beta_{1y})^2 a^{-1}b} \quad (15)$$

Assim, se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ e $\mu_1 = \mu_2$, $d = b$, e $a^{-1} = b$, obtém-se $k_2 = k_1$ e

$$\beta_{2x} = \sqrt{k_2^2 bd - (\beta_{1y})^2 b^2} = b\sqrt{k_1^2 - (\beta_{1y})^2} \equiv b\beta_{1x} \quad (16)$$

Substituindo (16) em (12) resulta em $\Gamma = 0$ para todo β_{1x} . Assim, a interface entre as regiões 1 e 2 não apresenta reflexão para qualquer ângulo de incidência.

A dedução acima pode ser repetida para a polarização TM_z . Aqui, o coeficiente de reflexão do campo elétrico é o dual de (12) e é encontrado substituindo b com d (e vice-versa), e a com c . Para este caso, ao se fazer $b = d$ e $c^{-1} = d$ atinge-se a condição onde não há reflexão de onda.

Combinando os resultados para os casos TE_z e TM_z , conclui-se que a transmissão da onda para a região 2 ocorre sem reflexão quando esta é composta por um meio uniaxial tendo os tensores

$$\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\bar{\mu}_2 = \mu_1 \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde Λ será definido a seguir.

A propriedade de não apresentar reflexão é completamente independente do ângulo de

incidência, polarização e frequência da onda incidente. Além disso, de (6) e (7), as características de propagação de ondas com polarização TE e TM são idênticas. Chama-se este de meio PML uniaxial (UPML) em reconhecimento à anisotropia uniaxial e ao casamento perfeito.

Similar ao PML de Berenger, a propriedade irreflexiva do meio UPML na região 2 é válida para qualquer Λ . Por exemplo, escolhendo $\Lambda = 1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_1}$. Então, a partir de (16) tem-se

$$\beta_{2x} = \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_1}\right) \beta_{1x} \quad (19)$$

Nota-se que a parte real de β_{2x} é idêntica à de β_{1x} . Combinado com (14), isto implica em velocidades de fase das ondas incidente e transmitidas idênticas para todos os ângulos de incidência. A impedância intrínseca da região 2 é também idêntica àquela da região 1, uma consequência do meio ser perfeitamente casado.

Finalmente, substituindo (14) e (19) em (10) e (11) tem-se os campos transmitidos para o meio UPML da região 2 para a onda TE_z incidente

$$\vec{H}_2 = \hat{z} H_0 e^{-j\beta_{1x}x - j\beta_{1y}y} e^{-\sigma\eta_1 x \cos\theta} \quad (20)$$

$$\vec{E}_2 = (-\hat{x}\Lambda\eta_1 \sin\theta + \hat{y}\eta_1 \cos\theta) H_0 e^{-j\beta_{1x}x - j\beta_{1y}y} e^{-\sigma\eta_1 x \cos\theta} \quad (21)$$

Aqui, $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$.

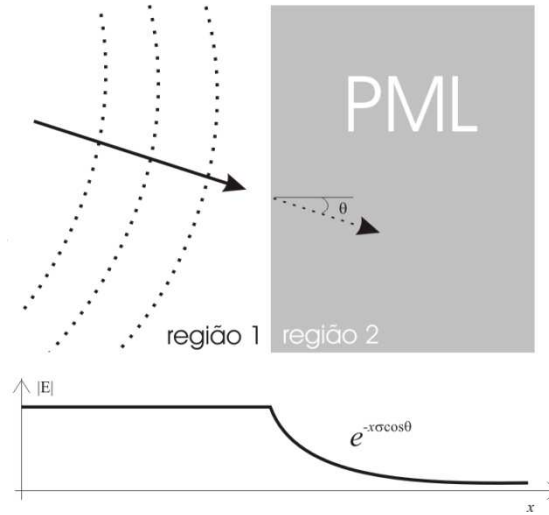


Figura 2.3 – Atenuação da onda incidindo com ângulo θ no meio PML

Assim, a onda transmitida no meio UPML se propaga com a mesma velocidade de fase que a onda incidente, enquanto simultaneamente é atenuada exponencialmente ao percorrer o eixo x normal a interface entre as Regiões 1 e 2, como mostra a Figura 2.3. O fator de atenuação é independente da frequência, embora dependa de θ e da condutividade σ do

meio UPML. Em pesquisas posteriores mais dois parâmetros foram incluídos em Λ , além de σ . São eles: o fator de escalonamento de coordenadas k e o deslocamento da frequência complexa α , os quais são explicados na seção seguinte.

2.2.2 EQUAÇÃO VETORIAL DA ONDA PARA O MEIO PML

O método FDTD, no qual o meio PML uniaxial foi originalmente desenvolvido, emprega as equações para as leis de Faraday e de Ampère-Maxwell separadamente, porém, o método FETD aqui empregado junta as duas leis na equação vetorial da onda para o campo elétrico.

Assim, a equação da onda num meio PML uniaxial orientado segundo o eixo x pode ser escrita a partir da equação de Helmholtz como

$$\begin{bmatrix} s\varepsilon/\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & s\varepsilon\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & s\varepsilon\Lambda \end{bmatrix} \vec{E} + \nabla \times \left(\begin{bmatrix} \Lambda/s\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1/s\mu\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/s\mu\Lambda \end{bmatrix} \nabla \times \vec{E} \right) = -\vec{J} \quad (22)$$

onde $s = j\omega$ é a frequência complexa, \vec{J} é o vetor densidade de corrente utilizado como gerador da onda, \vec{E} é o vetor campo elétrico e os tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética são uniaxiais como mostrado nas equações (17) e (18).

Como novidade na formulação deste trabalho, este será considerado como sendo um sistema com três pólos dados por

$$\xi_0 = 0 \quad (23)$$

$$\xi_1 = -\frac{\alpha}{\varepsilon} \quad (24)$$

$$\xi_2 = -\frac{\alpha}{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon} \quad (25)$$

tal que

$$\Lambda = \kappa \frac{s - \xi_2}{s - \xi_1} \quad (26)$$

onde ε é a permissividade elétrica, μ é a permeabilidade magnética, σ é a condutividade elétrica, κ é o fator de escalonamento e α é o deslocamento da frequência complexa.

Na região fora do meio PML tem-se $\kappa = 1$ e $\sigma = 0$. Sendo assim, pode-se omitir os índices 1 e 2 para diferenciar os meios 1 e 2.

O aumento de κ reduz a velocidade de fase da onda, o que significa introduzir um

aumento artificial do índice de refração que tem por consequência reduzir o ângulo de incidência θ , fazendo que o desempenho do meio PML seja melhorado nos casos de incidência mais oblíqua.

O desenvolvimento do método numérico utilizado para resolver a equação (22) utilizando os pólos acima, serão apresentados no capítulo 3.

2.3 DESEMPENHO TEÓRICO DO MEIO PML

2.3.1 O ESPAÇO CONTÍNUO

Quando usado para trancar uma malha de discretização, o meio PML possui a espessura L e é terminado pelo contorno externo da malha. Se o contorno externo é assumido ser uma superfície, Condutora Elétrica Perfeita (PEC - *Perfect Electric Conductor*), com resistência superficial nula, como mostrado na Figura 2.4, uma potência finita reflete de volta na zona de computação principal.

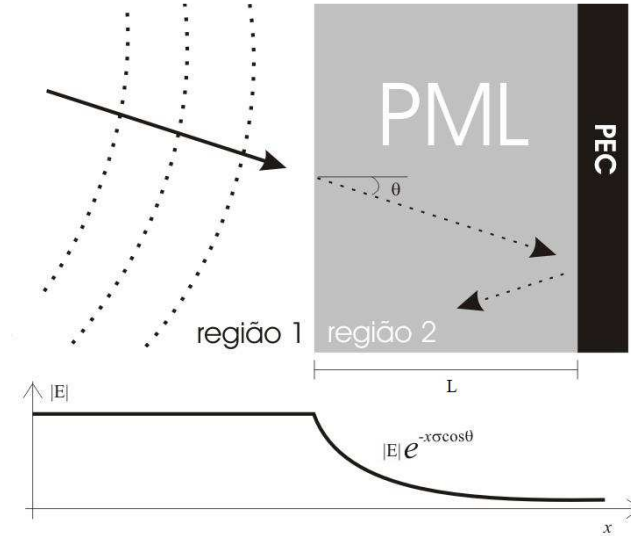


Figura 2.4 – Meio PML com contorno externo PEC

Para uma onda incidindo sobre o meio PML no ângulo θ relativo ao eixo x , esta reflexão pode ser calculada usando análise de linhas de transmissão, levando a

$$R(\theta) = e^{-2\sigma \eta L \cos\theta} \quad (27)$$

$R(\theta)$ é referido como o fator de reflexão uma vez que existe uma reflexão devido à parede PEC que fica atrás do meio PML. Este erro diminui exponencialmente com σ e L . Porém, o erro de reflexão aumenta com $e^{\cos\theta}$, alcançando o pior caso para $\theta = 90^\circ$. Neste ângulo

limite de incidência, $R = 1$ e o meio PML é completamente ineficiente. Para ser útil em uma simulação numérica, é interessante que $R(\theta)$ seja o menor possível. Claramente, para um meio PML fino, deve-se ter σ tão grande quanto possível para reduzir $R(\theta)$ a níveis aceitavelmente pequenos, especialmente para θ se aproximando de 90° .

2.3.2 O ESPAÇO DISCRETO

2.3.2.1 VARIAÇÃO GRADUAL DOS PARÂMETROS DO MEIO PML

Teoricamente, a transmissão sem reflexão da onda pode acontecer na interface do meio PML independente da descontinuidade local da condutividade σ , apresentada à onda eletromagnética incidente. Porém, no método FETD, ou em qualquer outra formulação numérica das equações de Maxwell, aparecem efeitos numéricos devido à amostragem espacial finita. Conseqüentemente, implementando o meio PML como uma única descontinuidade de σ na malha, leva a reflexões espúrias significantivas de ondas na superfície do meio PML conforme ilustra a Figura 2.5.

Para reduzir este erro de reflexão, Berenger propôs que as perdas do meio PML ao longo da direção normal à interface cresçam gradualmente a partir de zero. Mesmo assumindo tal variação gradual, o meio PML permanece casado, como mostrado em [3]. Assumindo o perfil de condutividade com variação gradual da condutividade $\sigma(x)$ do meio PML de espessura L terminado na condição PEC, tem-se de (21), o fator de reflexão

$$R(\theta) = e^{-2 \eta \cos \theta \int_0^L \sigma(x) dx} \quad (28)$$

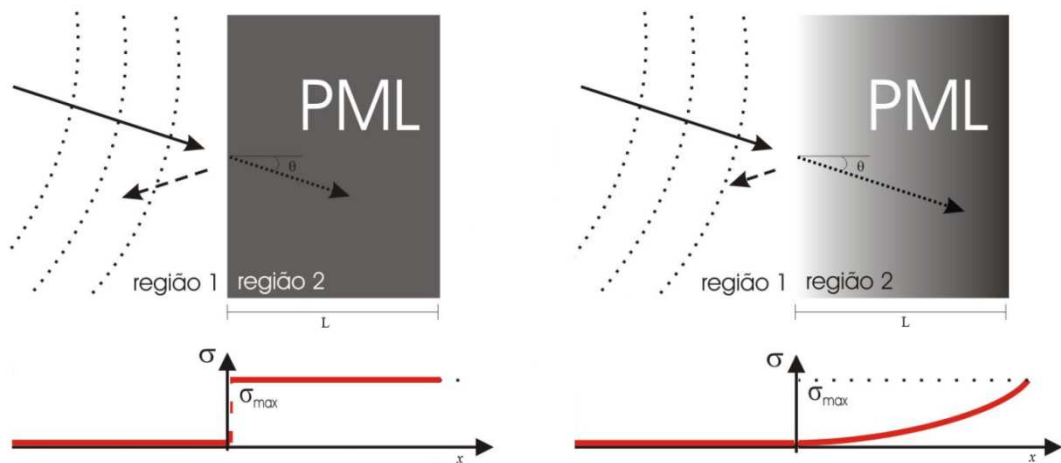


Figura 2.5 – a) A variação abrupta da condutividade faz com que haja muita reflexão, reduzindo o desempenho do meio PML. b) A variação gradual da condutividade reduz as reflexões o desempenho.

Variação Gradual Polinomial. Vários perfis foram sugeridos para as gradações de $\sigma(x)$ e $\kappa(x)$. O mais eficiente usa a variação polinomial ou geométrica no meio PML[11]. A gradação polinomial é simplesmente dada por

$$\sigma(x) = \left(x/L\right)^m \sigma_{max} \quad ; \quad k(x) = 1 + (k_{max} - 1) \cdot \left(x/L\right)^m \quad (29)$$

Isso aumenta o valor da condutividade σ do meio PML de zero em $x = 0$, o que é a interface do meio PML, até σ_{max} em $x = L$, que é o contorno terminado em PEC. Substituindo (29) em (28) resulta em

$$R(\theta) = e^{-2 \eta \sigma_{max} L \cos \theta / (m+1)} \quad (30)$$

Para um L fixo, a gradação polinomial fornece dois parâmetros: σ_{max} e m . Um m grande leva a uma distribuição $\sigma(x)$ que é relativamente plana próximo à interface com o meio PML. Porém, dentro do meio PML, σ aumenta mais rapidamente. Nesta região, as amplitudes dos campos decaem substancialmente e reflexões devido ao erro de discretização contribuem menos. Tipicamente, $3 \leq m \leq 4$ foi encontrado como sendo próximo ao ótimo para várias simulações com o método FDTD [11], [12], [13], [14].

Uma vez que a reflexão é dependente de $\cos(\theta)$, o valor mínimo é encontrado quando a incidência é normal a interface $\theta = 0$, este será chamado “erro de reflexão” pois indica a reflexão devida somente ao meio e a variação da condutividade e é denotado por $R(0)$.

Para a variação gradual polinomial, os parâmetros do meio PML podem ser prontamente determinados para uma dada estimativa de erro. Por exemplo, sabendo-se m , L e o erro de reflexão $R(0)$, então, a partir de (30), σ_{max} é computada como

$$\sigma_{max} = - \frac{(m+1) \ln[R(0)]}{2\eta L} \quad (31)$$

2.3.2.2 ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

A discretização espacial do meio provoca erros numéricos que podem ser vistos como reflexão das ondas ao longo das arestas de discretização, a reflexão é proporcional ao comprimento da aresta de discretização, chegando ao mínimo quando a aresta tende a zero, o caso contínuo.

O projeto de um meio PML efetivo requer o balanceamento entre o erro de reflexão teórico $R(\theta)$, e o erro de discretização numérica. Por exemplo, (31) fornece σ_{max} para a condutividade variada polinomialmente tendo $R(0)$ e m predeterminados. Se σ_{max} é pequeno,

a reflexão do meio PML é principalmente devido a seu revestimento PEC. A equação (28) fornece uma aproximação muito boa para o erro de reflexão para este caso. Porém, é desejável fazer σ_{max} tão grande quanto possível para minimizar $R(\theta)$. Infelizmente, se σ_{max} é muito grande, o erro de discretização devido à aproximação numérica domina, e o erro de discretização real é potencialmente algumas ordens de grandeza maior do que o predito por (28). Conseqüentemente, existe uma escolha ótima para σ_{max} que balanceia a reflexão do contorno externo PEC e do erro de discretização espacial.

Foi postulado por Berenger [3,11] que o maior erro de discretização ocorre em $x = 0$, que é a superfície do meio PML. Qualquer energia de onda que penetre mais no meio PML e então seja refletida sofre atenuação antes e depois de seu ponto de reflexão, e tipicamente não se torna uma grande contribuição ao erro. Assim, é desejável minimizar a descontinuidade em $x = 0$.

Através de uma extensiva série de experimentos numéricos, foi demonstrado em [13] que, para um grande número de aplicações, uma escolha ótima para $R(0)$ num meio PML com 10 células de espessura (FDTD) e gradação polinomial é $R(0) \approx e^{-16}$. Para um meio PML com 5 células de espessura $R(0) \approx e^{-8}$ é ótimo. De (31), isso leva a uma escolha ótima para σ_{max} para gradação polinomial:

$$\sigma_{opt} = -\frac{(m+1) \cdot (-16)}{(2\eta) \cdot (10\Delta L)} = \frac{0,8(m+1)}{\eta\Delta L} \quad (32)$$

onde ΔL é incremento espacial da malha no FDTD, que pode ser traduzido como sendo o comprimento médio de aresta no método FETD.

Esta expressão provou ser muito robusta para várias aplicações. Porém, seu valor pode ser muito grande quando o meio PML termina estruturas alongadas, com razões de aspecto superiores a 20:1.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

3.1 INTRODUÇÃO

Inicialmente, a elaboração do método numérico aqui utilizado teve como ponto de partida a equação vetorial da onda (equação de Helmholtz) para o campo elétrico que descreve o comportamento de uma onda eletromagnética em um meio homogêneo, linear e isotrópico

$$s\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} + \frac{1}{s}\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{E}\right) = -\vec{J} \quad (33)$$

O meio no qual a onda eletromagnética se propaga é descrito pela permissividade elétrica ε , condutividade σ e pela permeabilidade magnética μ . A resolução da equação e, por consequência, de uma simulação eletromagnética, consiste em se aplicar uma densidade de corrente \vec{J} , também chamada de fonte ou excitação, e encontrar o campo elétrico \vec{E} em toda a estrutura.

A equação (33) é função do espaço e da frequência complexa $s = j\omega$. Para transformá-la em uma equação numérica, discretizações espacial e temporal são realizadas para organizar, em seguida, um conjunto de equações matriciais recursivas que formam a base do método numérico [6] e que é descrito a seguir.

3.2 DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS

O método FETD é implementado de tal maneira que cada elemento finito contribui para a solução final da simulação. Inicialmente, os cálculos são realizados em cada um dos elementos finitos, aos quais se aplica uma formulação matemática conveniente e, em seguida, através da solução de um sistema linear de equações relativo ao conjunto de soluções em todos os elementos, obtém-se a solução global do problema.

Os elementos geométricos mais amplamente utilizados no método FETD para a discretização das estruturas simuladas são os tetraedros. Trata-se de uma figura geométrica flexível, com relações matemáticas bem conhecidas. Ao conjunto dos elementos finitos que decompõem o domínio computacional denomina-se malha. Em contraste com a malha hexaédrica utilizada no método FDTD, a malha tetraédrica apresenta a grande vantagem de se adaptar muito bem na discretização de estruturas com formatos arbitrários, tais como as que apresentam superfícies curvas ou geometrias complexas. A técnica numérica para se implementar o método FETD é baseada no método de Galerkin[15].

A Figura 3.1 ilustra os princípios de contorno, de domínio e da malha de discretização espacial para uma estrutura bidimensional.

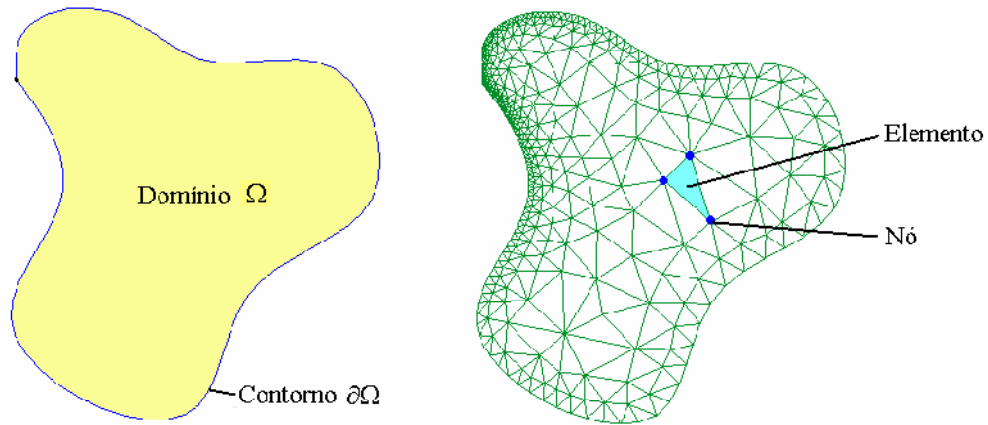


Figura 3.1 – a) Estrutura bidimensional mostrando o domínio e o contorno b) Malha de discretização espacial

A Figura 3.1(a) ilustra um domínio bidimensional Ω , que tem seu contorno $\partial\Omega$ delimitado por uma linha. A discretização espacial de um domínio bidimensional para a aplicação do método FETD é realizada através da sua divisão por sub-regiões triangulares conforme ilustra a Figura 3.1(b).

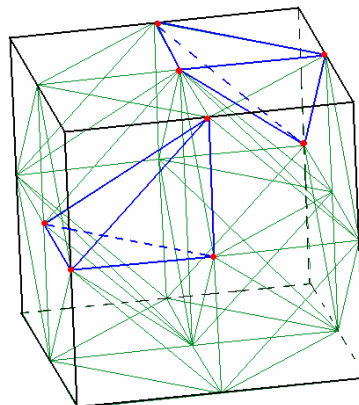


Figura 3.2 – Estrutura tridimensional discretizada espacialmente.

A Figura 3.2 mostra uma estrutura com domínio tridimensional discretizada por tetraedros. As linhas pretas contínuas e as linhas pretas pontilhadas formam as seis faces que constituem o contorno deste domínio.

As linhas azuis destacam dois elementos tetraédricos de discretização, doravante chamados somente de elementos. Os pontos vermelhos são chamados nós e são formados pela intersecção das arestas de cada um destes elementos. A Figura 3.3 mostra os detalhes constituintes de um elemento.

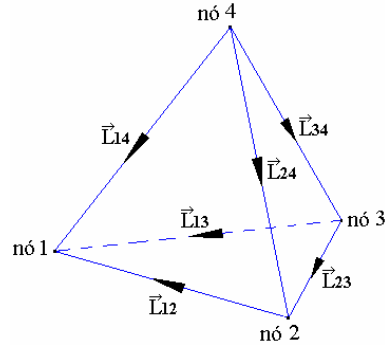


Figura 3.3 – Elemento tetraédrico

Um elemento é formado por quatro nós e seis arestas. Os índices de cada uma das arestas são formados pelos números dos nós que as definem. Convencionou-se o sentido das arestas indo do nó que tem a numeração maior ao nó de menor numeração: $\vec{L}_{12}, \vec{L}_{13}, \vec{L}_{14}, \vec{L}_{23}, \vec{L}_{24}, \vec{L}_{34}$.

Dentro de um elemento, o campo elétrico pode ser aproximado pela seguinte função de aresta vetorial solenoidal e linear [15] que também é chamada de Função de Whitney

$$\vec{E} = - \sum v_{ij} (\lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i) \quad (34)$$

sendo $i, j = 1, \dots, 4$ com $i < j$ e v_{ij} a diferença de potencial ao longo da aresta definida pelo par de pontos ij . λ_i e λ_j são coordenadas locais do elemento, também chamadas de coordenadas baricêntricas, e relacionam um ponto no interior do elemento às coordenadas cartesianas globais, sobre as quais se constrói virtualmente o objeto de estudo. A Figura 3.4 mostra o princípio de funcionamento das coordenadas locais.

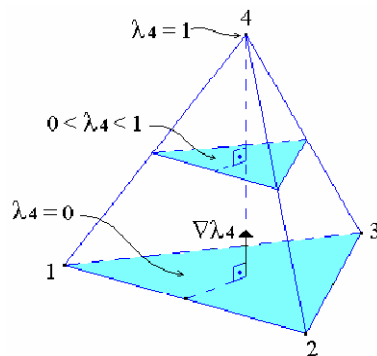


Figura 3.4 – Coordenadas locais do elemento de discretização

A coordenada local λ_i tem seu valor determinado pela distância relativa entre uma superfície paralela a superfície do tetraedro oposta ao ponto i . Observando a Figura 3.4 pode-

se ver que λ_4 vale 1 quando a superfície tende ao ponto 4 e zero quando a superfície assume a maior distância possível do ponto 4.

$\nabla\lambda_i$ e $\nabla\lambda_j$ são os gradientes das coordenadas locais λ_i e λ_j , respectivamente, os quais são vetores constantes e perpendiculares às faces do tetraedro opostas aos nós i e j , respectivamente.

3.3 MÉTODO DE GALERKIN

A discretização espacial é realizada através do método de Galerkin [16] que consiste em

- i) multiplicar a equação a ser discretizada por N funções de teste \vec{W}_m , $m = 1, \dots, N$
- ii) integrar sobre o domínio Ω e
- iii) aplicar a equação (34) para formar um sistema de N equações e N incógnitas

Aplicando as etapas *i* e *ii* na equação (33) obtém-se

$$s \int_{\Omega} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{W}_m d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \vec{E} \cdot \vec{W}_m d\Omega + \frac{1}{s} \int_{\Omega} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{W}_m d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{W}_m d\Omega \quad (35)$$

Usando-se a primeira identidade vetorial de Green

$$\int_{\Omega} \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{B} d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \vec{A} \times \hat{n} d\partial\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{A} d\Omega \quad (36)$$

sendo \hat{n} um versor normal ao contorno $\partial\Omega$, é possível reescrever o terceiro termo do lado esquerdo de (35), como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{W}_m d\Omega &= - \oint_{\partial\Omega} \vec{W}_m \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) \times \hat{n} d\partial\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \nabla \times \vec{W}_m \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (37)$$

A Lei de Faraday

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} = -s\vec{H} \quad (38)$$

permite expressar o termo que contém uma integral de linha na equação (37) como

$$- \oint_{\partial\Omega} \vec{W}_m \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) \times \hat{n} d\partial\Omega = s \oint_{\partial\Omega} \vec{W}_m \cdot \vec{H} \times \hat{n} d\partial\Omega \quad (39)$$

para então inserir a condição de contorno

$$\vec{H} = \frac{\hat{n} \times \vec{E}}{R_s} \quad (40)$$

onde R_s é a resistência superficial. Reescrevendo o integrando do lado direito da equação (39), através do produto misto, como

$$\vec{W}_m \cdot \vec{H} \times \hat{n} = \vec{W}_m \cdot \left(\frac{\hat{n} \times \vec{E}}{R_s} \right) \times \hat{n} = \frac{1}{R_s} (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} \times \vec{W}_m \quad (41)$$

Com as equações (37), (39) e (41) é possível adequar a equação (35) para a aplicação das condições de contorno conforme

$$\begin{aligned} s \int_{\Omega} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{W}_m d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \vec{E} \cdot \vec{W}_m d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{R_s} (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot (\hat{n} \times \vec{W}_m) d\partial\Omega \\ + \frac{1}{s} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{W}_m d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{W}_m d\Omega \end{aligned} \quad (42)$$

O campo elétrico \vec{E} na equação (42) é então aproximado pela combinação linear de funções de base iguais às funções de teste

$$\vec{E} = - \sum_{n=1}^N v_n \vec{W}_n \quad (43)$$

onde n é um índice que corresponde à numeração global de todas as N arestas da malha de discretização espacial do domínio. A etapa (iii) do método de Galerkin aplica a equação (43) na equação (42), para formar o seguinte sistema de N equações e N incógnitas

$$\begin{aligned} s \int_{\Omega} \varepsilon v_n \vec{W}_n \cdot \vec{W}_m d\Omega + \int_{\Omega} \sigma v_n \vec{W}_n \cdot \vec{W}_m d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{R_s} (\hat{n} \times v_n \vec{W}_n) \cdot (\hat{n} \times \vec{W}_m) d\partial\Omega \\ + \frac{1}{s} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times v_n \vec{W}_n \cdot \nabla \times \vec{W}_m d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{W}_m d\Omega \end{aligned} \quad (44)$$

Sendo que as funções de teste \vec{W}_m , $m = 1, \dots, N$ geram N equações e as tensões ao longo das arestas dos tetraedros v_n , $n = 1, \dots, N$ correspondem às N incógnitas do sistema.

3.4 EQUAÇÃO MATRICIAL DA ONDA

A equação matricial (44) é escrita sucintamente como

$$[s\mathbf{C} + \mathbf{G} + s^{-1}\mathbf{R}_0]\mathbf{v} = \mathbf{i} \quad (45)$$

A equação (45) representa a equação (33) discretizada no espaço. Onde \mathbf{i} é o vetor corrente de excitação e \mathbf{v} são as tensões ao longo das arestas dos tetraedros. Localmente, \mathbf{C} , \mathbf{G} e \mathbf{R}_0 são matrizes expressas por

$$C_{kl} = \int_V \varepsilon \vec{W}_k \cdot \vec{W}_l dV \quad (46)$$

$$G_{kl} = \int_V \sigma \vec{W}_k \cdot \vec{W}_l dV + \oint_S \frac{1}{R_s} (\hat{n} \times \vec{W}_k) \cdot (\hat{n} \times \vec{W}_l) dS \quad (47)$$

$$R_{0kl} = \int_V \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{W}_k \cdot \nabla \times \vec{W}_l dV \quad (48)$$

onde $k, l = 1, \dots, 6$ são as arestas de um tetraedro e V é o seu volume.

As matrizes \mathbf{C} , \mathbf{G} e \mathbf{R}_0 possuem dimensões de capacitância, condutância e relutância magnética, respectivamente. A equação global da onda eletromagnética é formada pela superposição dos elementos de cada uma destas matrizes que possuem todas as arestas da malha de discretização submetidas a um procedimento de enumeração global [17].

A Tabela 3.1 demonstra os valores de R_s para diferentes condições de contorno aplicadas aos materiais constituintes da estrutura simulada.

Condição de Contorno	PEC	ABC	PMC
R_s	0	$\sqrt{\mu/\varepsilon}$	∞

Tabela 3.1 – Valor de R_s para algumas condições de contorno

onde R_s é a resistência superficial do contorno para um domínio tridimensional e é a resistência linear para um domínio bidimensional. As condições mostradas na Tabela 3.1 serão definidas nas próximas seções.

3.5 MEIOS DISPERSIVOS

Quando as características macroscópicas de um meio tornam-se dependentes da frequência, como é o caso do meio PML, o sistema torna-se dispersivo e surgem P pólos adicionais fora da origem. Neste caso a equação matricial pode ser escrita como

$$\left[sC + G + \sum_{p=0}^P (s - \xi_p)^{-1} R_p \right] v = i \quad (49)$$

onde R_0 e $\xi_0 = 0$ correspondem aos meios não dispersivos e R_p e $\xi_p \neq 0$, para $p > 0$, correspondem aos pólos adicionais dos meios com dispersão.

Para se obter a equação correspondente no domínio do tempo discreto segue-se as seguintes etapas:

i) escreve-se separadamente cada termo do somatório em (49) obtendo-se

$$(sC + G)v = i - \sum_{p=0}^P i_p \quad (50)$$

$$\text{onde } i_p = (s - \xi_p)^{-1} R_p v \quad (51)$$

ii) aplica-se a transformação bilinear

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (52)$$

iii) realiza-se a transformada z inversa através da propriedade do deslocamento

$$z^{-k} v \leftrightarrow v^{n+k} \quad (53)$$

onde o índice superior $n + k$ representa o instante de tempo discreto $t = (n + k)\Delta t$.

No domínio do tempo discreto a equação (50) corresponde a

$$\frac{2}{\Delta t} C(v^{n+1} - v^n) + G(v^{n+1} + v^n) = i^{n+1} + i^n - \sum_{p=0}^P i_p^{n+1} + i_p^n \quad (54)$$

e a equação (51) corresponde a

$$\frac{2}{\Delta t} R_p(v^{n+1} + v^n) = i_p^{n+1} - i_p^n - \varphi_p(i_p^{n+1} + i_p^n) \quad (55)$$

onde $\varphi_p = \xi_p \frac{\Delta t}{2}$. Isolando i_p^{n+1} da equação (55) e substituindo em (54), encontra-se o conjunto final de equações recursivas para sistemas dispersivos

$$Av^{n+1} = Bv^n - \sum_{p=0}^P \frac{2}{1 - \varphi_p} i_p^n + i_p^{n+1} + i_p^n \quad (56)$$

$$i_p^{n+1} = \frac{1 + \varphi_p}{1 - \varphi_p} i_p^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{1 - \varphi_p} R_p (v^{n+1} + v^n) \quad (57)$$

com

$$A = \frac{2}{\Delta t} C + G + \frac{\Delta t}{2} \sum_{p=0}^P \frac{1}{1 - \varphi_p} R_p \quad (58)$$

$$B = \frac{2}{\Delta t} C - G - \frac{\Delta t}{2} \sum_{p=0}^P \frac{1}{1 - \varphi_p} R_p \quad (59)$$

O vetor desejado v^{n+1} é obtido pela solução de (56) pelo método do gradiente conjugado com pré-condicionamento diagonal [18] e usando v^n como valor inicial.

A transformação bilinear apresenta a vantagem de não alterar a estabilidade do sistema quando da sua conversão de analógico (tempo contínuo) para digital (tempo discreto) [19]. Assim, se os pólos possuírem parte real negativa, a solução numérica será incondicionalmente estável.

3.6 PARÂMETROS DE DISCRETIZAÇÃO

Na formação da malha de discretização espacial por tetraedros são respeitados os critérios de dispersão e estabilidade numérica do método descrito em [20]. O princípio básico na determinação das dimensões do tetraedro é que ele seja bem menor do que o menor comprimento de onda eletromagnética sob observação. Os resultados numéricos de [20] estabelecem um critério para se respeitar o limite de dispersão numérica que obedece a seguinte equação

$$\Delta L = \frac{1}{10 f_{max} \sqrt{\mu \epsilon}} \quad (60)$$

onde f_{max} é a frequência máxima do sinal de excitação, o ΔL é o tamanho médio das arestas da malha de discretização. Nas simulações, utilizou-se o passo no tempo normalizado unitário de acordo com [6] por

$$\frac{\Delta t}{\Delta L \sqrt{\mu \epsilon}} = 1 \quad (61)$$

sendo ΔL o comprimento da menor aresta da malha de discretização espacial.

3.7 O MEIO PML

Para a aplicação da formulação apresentada pelas equações (55)-(59), na seção 3.5, os elementos dos tensores em (22) devem ser decompostos em frações parciais conforme

$$\frac{s\varepsilon}{\Lambda} = \frac{\varepsilon}{\kappa} \left[s + \xi_2 - \xi_1 + \frac{\xi_2(\xi_1 - \xi_0)}{s - \xi_2} \right] \quad (62)$$

$$s\varepsilon\Lambda = \kappa\varepsilon \left[s + \xi_1 - \xi_2 + \frac{\xi_1(\xi_1 - \xi_2)}{s - \xi_1} \right] \quad (63)$$

$$\frac{\Lambda}{s\mu} = \frac{\kappa}{\mu} \left[\frac{\xi_2 - \xi_1}{s} + \frac{1 - \xi_2/\xi_1}{s - \xi_1} \right] \quad (64)$$

$$\frac{1}{s\mu\Lambda} = \frac{1}{\kappa\mu} \left[\frac{\xi_1/\xi_2}{s} + \frac{1 - \xi_1/\xi_2}{s - \xi_2} \right] \quad (65)$$

com $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = -\frac{\alpha}{\varepsilon}$ e $\xi_2 = -\frac{\alpha}{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon}$.

A fim de se obter uma implementação computacional eficiente, o parâmetro α foi mantido fixo e a variação gradual dos parâmetros σ e κ foi escolhida de forma que a relação entre estes permanecesse constante. Assim, os pólos ξ_1 e ξ_2 também passam a ser constantes em toda a região do meio PML e, portanto, apenas dois vetores auxiliares adicionais, i_2 e i_3 , são necessários. A gradação polinomial dada por

$$\kappa = 1 + (\kappa_{max} - 1) \left(\frac{x}{L} \right)^m \quad (66)$$

foi adotada juntamente com

$$\frac{\sigma}{\kappa} = \frac{\sigma_{max}}{\kappa_{max}} \quad (67)$$

logo

$$\xi_2 = -\frac{\alpha}{\varepsilon} - \frac{\sigma_{max}}{\kappa_{max}\varepsilon} \quad (68)$$

onde κ_{max} foi encontrado através de experimentação, como será mostrado no capítulo 4.

Os elementos das matrizes do sistema são calculados através de

$$C_{kl} = \int_V \frac{\varepsilon}{\kappa} (\hat{x} \cdot \vec{W}_k) (\hat{x} \cdot \vec{W}_l) dV + \int_V \kappa\varepsilon (\hat{x} \times \vec{W}_k) \cdot (\hat{x} \times \vec{W}_l) dV \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
G_{kl} = & \int_V \frac{\varepsilon}{\kappa} (\xi_2 - \xi_1) (\hat{x} \cdot \vec{W}_k) (\hat{x} \cdot \vec{W}_l) dV \\
& + \int_V \kappa \varepsilon (\xi_1 - \xi_2) (\hat{x} \times \vec{W}_k) \cdot (\hat{x} \times \vec{W}_l) dV \\
& + \oint_S \frac{1}{R_s} (\hat{n} \times \vec{W}_k) \cdot (\hat{n} \times \vec{W}_l) dS
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
R_{0kl} = & \int_V \frac{\kappa \xi_2}{\mu \xi_1} (\hat{x} \cdot \nabla \times \vec{W}_k) (\hat{x} \cdot \nabla \times \vec{W}_l) dV \\
& + \int_V \frac{\xi_1}{\kappa \mu \xi_2} (\hat{x} \times \nabla \times \vec{W}_k) (\hat{x} \times \nabla \times \vec{W}_l) dV
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
R_{1kl} = & \int_V \frac{\kappa}{\mu} \left(1 - \frac{\xi_2}{\xi_1}\right) (\hat{x} \cdot \nabla \times \vec{W}_k) (\hat{x} \cdot \nabla \times \vec{W}_l) dV \\
& + \int_V \kappa \mu \xi_1 (\xi_1 - \xi_2) (\hat{x} \times \vec{W}_k) (\hat{x} \times \vec{W}_l) dV
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
R_{2kl} = & \int_V \frac{\varepsilon}{\kappa} \xi_2 (\xi_2 - \xi_1) (\hat{x} \cdot \vec{W}_k) (\hat{x} \cdot \vec{W}_l) dV \\
& + \int_V \frac{1}{\kappa \mu} \left(1 - \frac{\xi_1}{\xi_2}\right) (\hat{x} \times \nabla \times \vec{W}_k) (\hat{x} \times \nabla \times \vec{W}_l) dV
\end{aligned} \tag{73}$$

onde \hat{x} é o vetor unitário na direção radial e \hat{n} em (70) é o vetor unitário normal ao contorno.

Nas equações (69)-(73) o valor de κ dado por (66) é calculado pela coordenada x do baricentro de cada elemento considerando que o meio PML está compreendida na região $0 < x < L$. Fora do meio PML $x < 0$ utilizam-se $\xi_1 = \xi_2$ e $\kappa = 1$.

4 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

4.1 INTRODUÇÃO

O meio PML caracteriza-se por ser um meio absorvedor de onda eletromagnética independente do ângulo de incidência da mesma. Para testar se a formulação apresentada apresenta esta característica é necessária a geração de ondas planas que incidam na interface do meio PML com diversos ângulos. Esta tarefa foi realizada neste trabalho com a utilização de guias de ondas retangulares, pois a geração das ondas seria muito mais complexa se outro método fosse utilizado.

Os guias de ondas retangulares apresentam a característica de propagação dispersiva da onda eletromagnética, ou seja, ondas com frequências diferentes viajam através do guia com velocidades diferentes. Como consequência, cada frequência proporcionará um ângulo de incidência distinto, que será utilizado para avaliar o desempenho do meio PML.

O desempenho do meio PML será avaliado através da obtenção do coeficiente de reflexão, uma vez que este meio apresenta a característica de ser absorvente, quanto menor o coeficiente de reflexão, maior a absorvência do meio PML e melhor sua eficiência.

Dois tipos de guias foram testados, um guia retangular metálico físico e um guia teórico dual a este, pois neste o campo elétrico incide obliquamente à interface do meio PML, ao contrário do guia metálico. Dessa forma, pode-se investigar as diversas formas de incidência da onda eletromagnética no meio PML e assim verificar a validade da formulação e os parâmetros que otimizam seu desempenho.

4.2 GUIA DE ONDA METÁLICO

O guia de ondas físico utilizado nas simulações é o WR112, que possui as características mostradas na Tabela 4.1 e esboçado na Figura 4.1:

Característica	Valor
Largura (a)	28,50 mm
Altura (b)	12,62 mm
Comprimento(c)	120 mm
Frequência de Corte	5,259 GHz
Faixa de Frequência	7,05 – 10,00 GHz

Tabela 4.1 – Características de um guia de ondas WR112

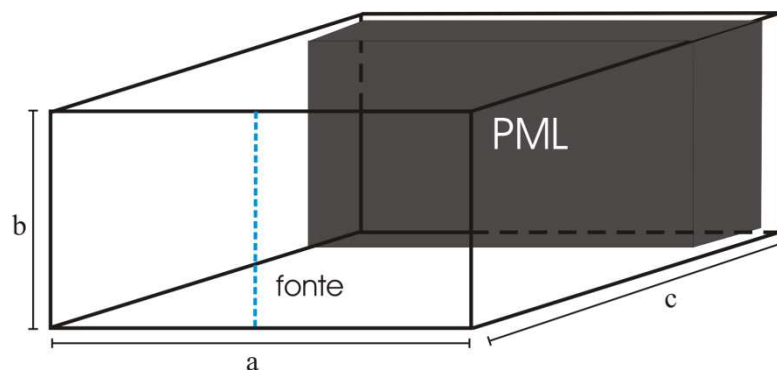


Figura 4.1 – Guia de onda físico WR112 utilizado como base para a estrutura simulada

Devido à simetria geométrica da estrutura, não há necessidade de se simular a estrutura completa, sendo assim foi simulado apenas um quarto da estrutura, como mostrado na Figura 4.2.

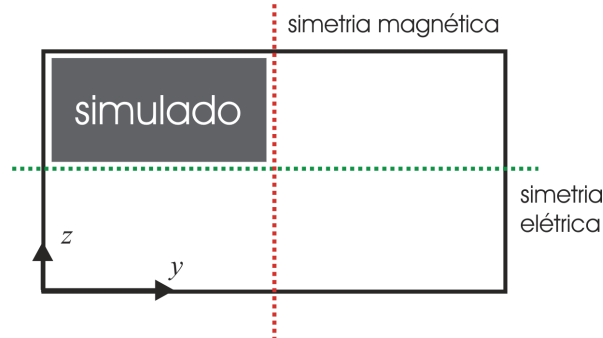


Figura 4.2 – Simetrias elétrica e magnética encontradas no guia de ondas

A estrutura simulada possui 120 mm de comprimento. A Figura 4.3 mostra a estrutura simulada. Foi utilizada a condição PEC em lugar do metal, pois isso se aproxima muito da condição real. Foi atribuído PEC à superfície inferior, pois no modo de propagação TE_{10} o campo elétrico é normal a esta superfície de simetria. Já à superfície lateral direita, foi atribuída a condição PMC, pois o campo magnético é normal a ela neste modo, denotando a simetria magnética que existe no plano vertical.

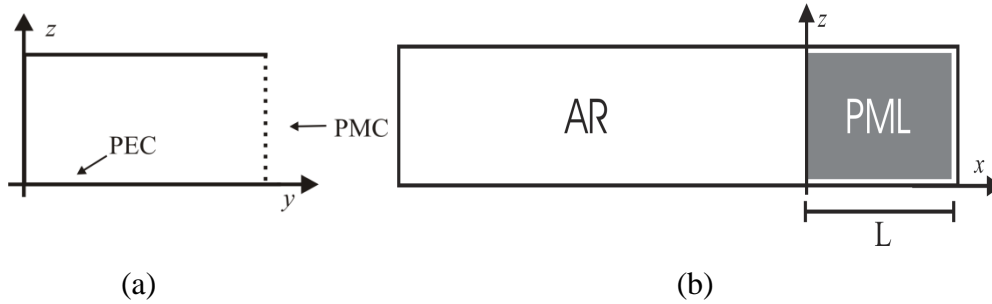


Figura 4.3 – Cortes transversal (a) e longitudinal (b) da estrutura simulada

4.2.1 MODO TE_{10}

Uma vez que o modo TE_{10} é o modo de propagação dominante no guia retangular, e também o modo mais comumente usado para operação, é apropriado examinar este modo em mais detalhe. Os componentes de campo para este modo são (propagação na direção x):

$$H_x = j \frac{E_0}{Z_h} \frac{k_c}{\beta} \cos \frac{\pi y}{a} e^{-j\beta x} \quad (74)$$

$$H_y = -\frac{E_0}{Z_h} \sin \frac{\pi y}{a} e^{-j\beta x} \quad (75)$$

$$E_z = E_0 \sin \frac{\pi y}{a} e^{-j\beta x} \quad (76)$$

Os parâmetros β, k_c, Z_h são dados por

$$k_c = \frac{\pi}{a} \quad (77)$$

$$\beta = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (78)$$

$$Z_h = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{k_0}{\beta} Z_0 \quad (79)$$

onde $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

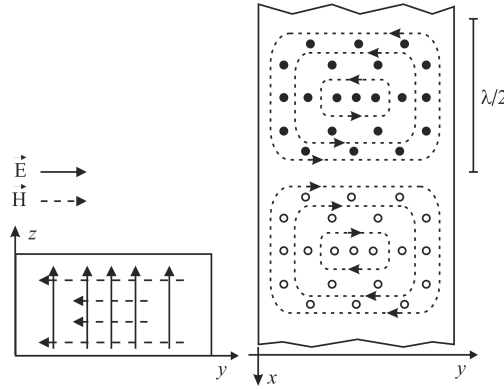


Figura 4.4 – Campos elétrico e magnético do modo TE_{10}

Na Figura 4.4 as linhas de campo elétrico e magnético com o modo TE_{10} são ilustradas. Note que as linhas de campo elétrico são circundadas pelas linhas de fluxo magnético, logo, podem ser consideradas fontes do campo magnético (corrente de deslocamento). Por outro lado, as linhas de campo elétrico terminam em uma distribuição de cargas nas superfícies internas superior e inferior do guia de ondas. Estas cargas oscilam nas direções axial e transversal e, assim, constituem uma corrente de condução axial e transversal que forma a continuação da corrente de deslocamento. A corrente total, condução mais deslocamento, forma uma ligação fechada das linhas de campo magnético, e como tal pode ser considerado como sendo gerado pelo fluxo magnético que elas circundam. Isto completa a ação requerida de mútua ajuda entre o campo magnético e o campo elétrico que é necessário para a propagação da onda.

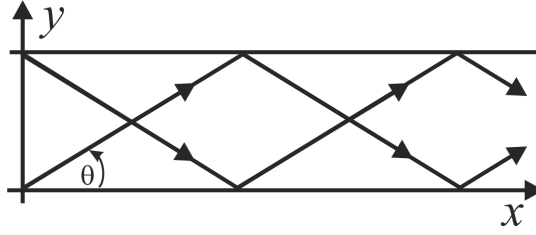


Figura 4.5 – Decomposição do modo TE_{10} em duas ondas planas

Os campos para o modo TE_{10} podem ser decompostos em uma soma de duas ondas planas TEM propagando-se por reflexão entre as duas paredes do guia em $y = 0$ e $y = a$, como na Figura 4.5. Para o campo elétrico tem-se

$$E_z = \frac{E_0}{2j} \left(e^{j\frac{\pi}{a}y - j\beta x} - e^{-j\frac{\pi}{a}y - j\beta x} \right) \quad (80)$$

se π/a e β forem expressos como

$$\frac{\pi}{a} = k_0 \sin \theta \quad \beta = k_0 \cos \theta \quad (81)$$

a relação (78) é mantida. O campo elétrico pode ser reescrito como

$$E_z = \frac{E_0}{2j} \left(e^{-jk_0(y \sin \theta + x \cos \theta)} - e^{-jk_0(-y \sin \theta + x \cos \theta)} \right) \quad (82)$$

o que são claramente duas ondas planas se propagando com ângulos $\pm\theta$ medidos a partir do eixo x , como ilustrado na Figura 4.5. Alternativamente o campo pode ser visto como uma onda plana refletindo para frente e para trás entre as paredes do guia. Os planos de fase constante associados a estas ondas planas propagando-se obliquamente movem-se na direção x com velocidade de fase $\frac{c}{\cos \theta} = \frac{\beta_c}{k_0}$, sendo esta a razão pela qual a velocidade de fase do modo TE_{10} excede a velocidade da luz. Uma vez que a energia em uma onda TEM viaja a uma velocidade c na direção em que se propaga a onda plana, esta energia se propagará pelo guia com a velocidade da componente de c projetada no eixo x . Esta componente é $v_g = c \cos \theta = \left(\frac{k_0}{\beta} \right) c$ e é a velocidade de grupo para o modo TE_{10} . Quando $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ a onda plana se reflete nas paredes e não se propaga pelo guia, esta é a condição de corte do modo é dada por

$$f_c = \frac{c}{2a} \quad (83)$$

4.2.2 FONTE DE EXCITAÇÃO

Como fonte de excitação do sistema, foi utilizado um pulso de corrente cosseno levantado com duração de 1ns modulando uma portadora com frequência de 10,5GHz, como mostrado na Figura 4.6.

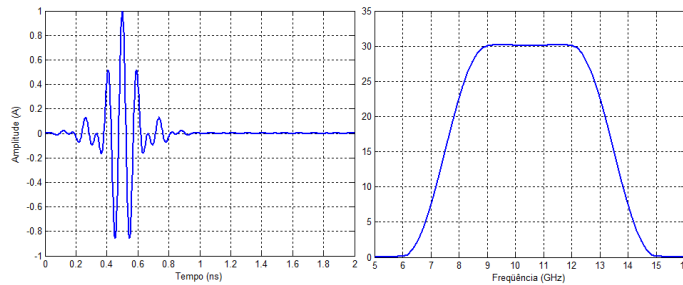


Figura 4.6 – Fonte de excitação no tempo e na frequência

Esta fonte foi escolhida porque ela excita o modo TE_{10} acima da sua frequência de corte (5,26 GHz) e abaixo da frequência de corte do modo TE_{30} (15,8 GHz), isto é de interesse pois próximo a frequência de corte do modo, o ângulo de incidência da onda próximo a 90° não sendo absorvida pelo meio PML, gerando assim ressonância que prejudicaria a análise dos resultados. Esta fonte possui a maior parte de sua energia na faixa de 7 a 14 GHz, o que corresponde a $49^\circ > \theta > 22^\circ$ como mostrado na Figura 4.7.

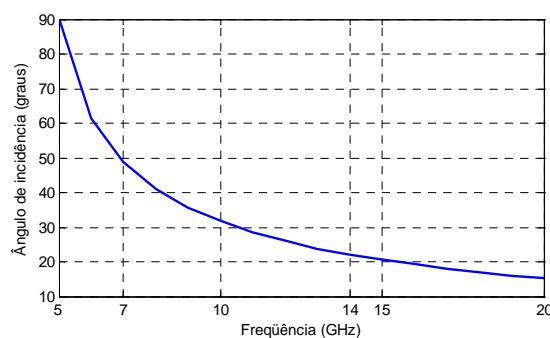


Figura 4.7 – Ângulo de incidência vs. frequência para o modo TE_{10}

4.2.3 AMOSTRAGEM DO CAMPO ELÉTRICO

O campo elétrico foi amostrado sobre dois planos distantes 3mm um do outro e 18mm da fonte, como mostrado na Figura 4.8. A amostragem ocorre no baricentro de cada triângulo das malhas que discretizam os planos, e os valores são transformados para o domínio da

frequência através da transformada discreta de Fourier.

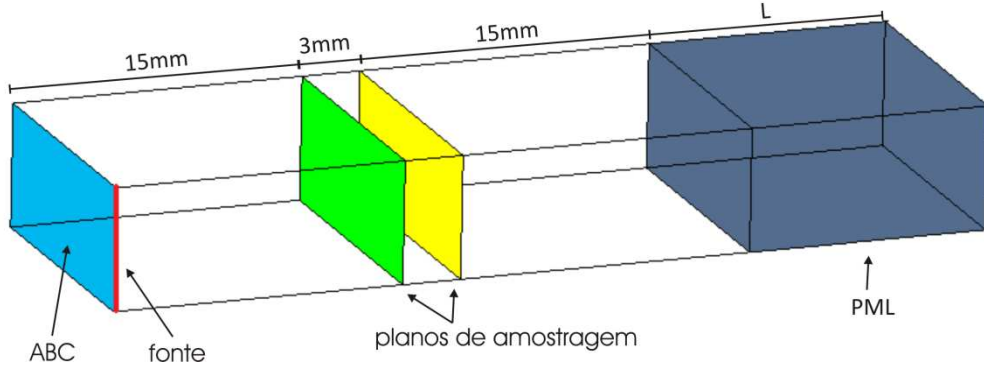


Figura 4.8 – Planos de amostragem

A fim de medir somente o modo TE_{10} e eliminar os demais modos de propagação presentes no guia de onda, foi realizada a multiplicação do campo observado pelo campo teórico no modo TE_{10} , mostrado na Figura 4.9, e sua posterior integração sobre os planos de amostragem como mostrado na Figura 4.8. Isso leva a dois valores de campo, aqui chamados de E_1 e E_2 , que foram utilizados na obtenção do coeficiente de reflexão.

$$E_{1,2} = \frac{2}{ab} \int_{s_{1,2}} E_z \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) dy dz \quad (84)$$

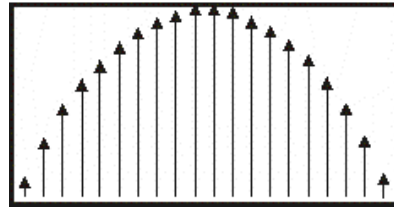


Figura 4.9 – Formato teórico do campo elétrico no modo TE_{10}

4.2.4 CÁLCULO DO COEFICIENTE DE REFLEXÃO

A fim de medir o desempenho da formulação, utilizou-se como parâmetro de referência o coeficiente de reflexão, uma vez que o meio PML é um meio absorvedor e quanto menor o coeficiente de reflexão melhor o seu desempenho.

Segundo [21], o coeficiente de reflexão pode ser dado por

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} \quad (85)$$

onde, E_i é o campo elétrico da onda incidente e E_r é o campo elétrico da onda refletida.

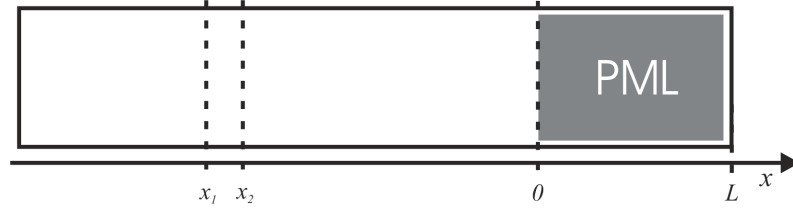


Figura 4.10 – Posição dos planos de medição usados para o cálculo do coeficiente de reflexão

Também se pode definir que os campos elétricos E_l e E_2 se relacionam com E_i e E_r através de,

$$E_1 = E_i e^{j\beta x_1} + E_r e^{-j\beta x_1} \quad (86)$$

$$E_2 = E_i e^{-j\beta x_2} + E_r e^{j\beta x_2} \quad (87)$$

Resolvendo o sistema de equações e usando (84) encontra-se

$$\Gamma = \frac{e^{j\beta(x_2-x_1)} - \frac{E_1}{E_2}}{\frac{E_1}{E_2} - e^{-j\beta(x_2-x_1)}} \quad (88)$$

onde β é dado por (78).

O desempenho da absorção do meio PML será avaliado pela magnitude em dB do coeficiente de reflexão dada por $|\Gamma|_{dB} = 20 \log|\Gamma|$.

4.2.5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Foram realizadas diversas simulações variando os seguintes parâmetros:

ΔL – aresta média de discretização

$L/\Delta L$ – espessura do meio PML, de 1 a 25 arestas

σ_{max} – condutividade máxima do meio PML, de 70% a 130% da σ_{opt}

m – grau do polinômio de gradação da condutividade, de 2 a 5

k_{max} – de 1 a 30

Material de terminação do meio PML – ABC, PML e PEC

α – foi mantido constante em 3×10^{-6}

Foram geradas todas as combinações possíveis para os parâmetros acima e os resultados das simulações será mostrado a seguir.

A formulação apresentada na seção 3.7 foi implementada em MATLAB [22], a descrição da estrutura foi feita com a utilização do aplicativo GiD [23] e simulações foram

realizadas a fim de investigar seu funcionamento e comparar seu desempenho com outras formulações.

As características das ferramentas para realizar as simulações são apresentadas na Tabela 4.2.

Processador	Intel Core 2 Duo T7500
Frequência de clock	2,2 GHz
Memória RAM	2 GB
Sistema operacional	Windows Vista Home 32-bit
Matlab	Versão 7.0
GiD	Versão 7.2

Tabela 4.2 – Características do ambiente de simulação

Em nenhuma das simulações foram observadas instabilidades numéricas, porém o número de iterações do método do gradiente conjugado precisou ser aumentado de 8 (usado em meios isotrópicos e não dispersivos) para 12.

A. Obtenção do valor ótimo de k_{max}

A fim de encontrar o valor de k_{max} que apresenta o melhor desempenho, foram testados valores de 1 a 30 para cada combinação de m e L . A Figura 4.11 mostra uma destas combinações

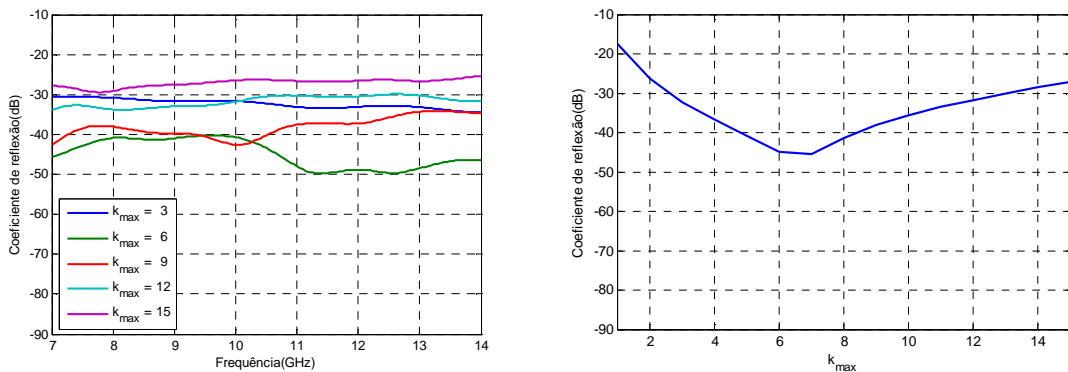


Figura 4.11 – Obtenção de k_{opt} a) coeficiente de reflexão para os diversos valores de k_{max} com $L/\Delta L = 4$, $m = 2$ e $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$ b) perfil de variação do coeficiente de reflexão x k_{max}

Pode-se ver que para este caso, o valor de k_{max} que faz com que o meio PML tenha o melhor desempenho é $k_{max} = 6$ que será chamado de k_{opt} .

A curva com k_{opt} é aquela que apresenta a menor média do módulo do coeficiente de reflexão $|\Gamma|_{dB}$, esta relação foi utilizada para encontrar os valores de k_{opt} automaticamente devido ao grande espaço amostral proporcionado pela combinação dos parâmetros.

A Figura 4.12 mostra o resultado para k_{opt} em função de m e $L/\Delta L$,

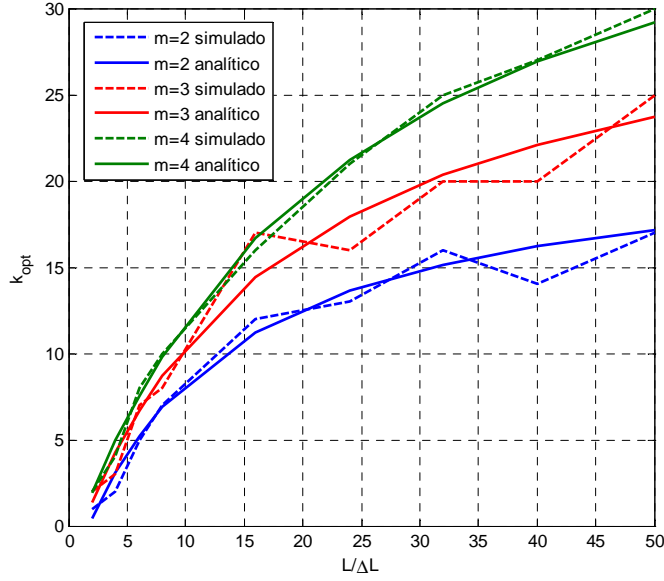


Figura 4.12 – k_{opt} x $L/\Delta L$, simulados e aproximados por equação empírica $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$

onde as linhas tracejadas são os valores de k_{opt} obtidos nas simulações. Estes valores foram utilizados para se obter uma equação empírica para seu comportamento. Tal equação foi obtida através da utilização da ferramenta de ajuste *curve fitting tool* do MATLAB e é mostrada a seguir.

$$k_{opt} = \frac{11mL/\Delta L - 19}{L/\Delta L + 3m} \quad (89)$$

O resultado desta equação empírica é mostrado na Figura 4.12 pelas linhas cheias. Esta equação foi testada para outras combinações e mostrou o desempenho esperado.

B. Refinamento da malha de discretização

Segundo [1] na discretização espacial da estrutura o comprimento médio das arestas ΔL dos tetraedros deve ser de cerca de um décimo do menor comprimento de onda considerado na simulação. No caso estudado tal comprimento é aproximadamente 3mm. Para estudar a influência do ΔL no desempenho do PML, foram realizadas simulações com 1, 2 e 3mm, uma vez que boa parte da reflexão é devida a malha de discretização.

ΔL (mm)	Nº de tetraedros	$ \Gamma _{db}$ a 14GHz	Tempo de processamento (s)
1	66014	-53	447
2	8106	-46	55
3	2299	-34	14

Tabela 4.3 – Efeito do refinamento da malha de discretização no desempenho e tempo de processamento

Como era de se esperar, o resultado mostra que o fator de reflexão diminui com o refinamento da malha, assim como o tempo de processamento aumenta. Sendo assim, resolveu-se utilizar no decorrer deste trabalho o comprimento médio de aresta como sendo $\Delta L = 2$ mm, balanceando a exatidão com o tempo de simulação.

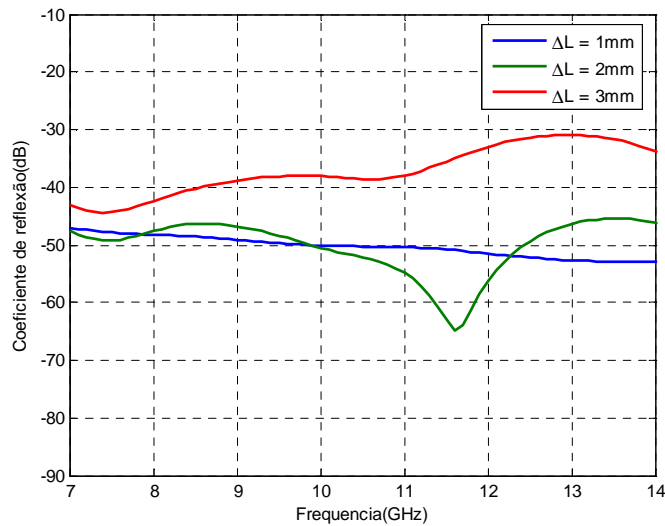


Figura 4.13 – Efeito do refinamento da malha na simulação, com $L = 16$, $m = 3$, $k_{max} = k_{opt}$,

$$\sigma_{max} = \sigma_{opt}$$

C. Gradação da condutividade

Como apresentado na seção 2.3.2.1, a condutividade deve variar gradualmente ao longo do meio PML. Sendo assim, algumas simulações foram realizadas e a comparação entre o desempenho do meio PML para os diversos graus de polinômio de gradação são mostrados na Figura 4.14.

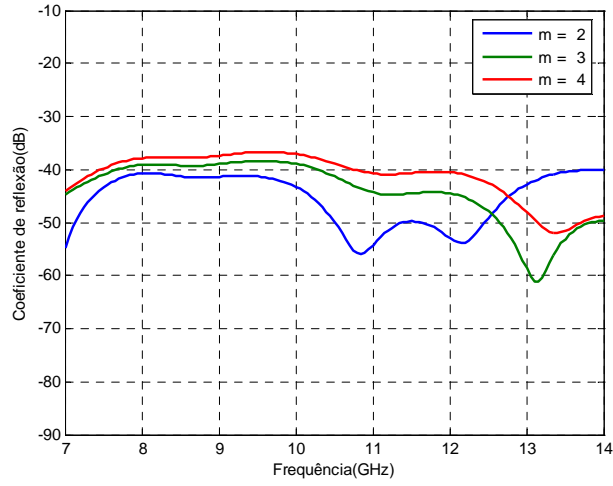


Figura 4.14 – Variação do grau do polinômio na gradação, com $L = 8$, $k_{max} = k_{opt}(7,8 \text{ e } 10 \text{ para } m = 2, 3 \text{ e } 4)$, $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$.

Na maioria das simulações a utilização de $m = 2$ resultou em melhor desempenho da formulação.

D. Condutividade máxima

Da equação (32) para $m = 3$ a condutividade máxima ótima é

$$\sigma_{opt} = 0,0042 \text{ S/mm}$$

A Figura 4.15 mostra os resultados dos testes de variação da condutividade máxima, foram realizadas simulações utilizando os valores dados por (32) com variações de $\pm 30\%$.

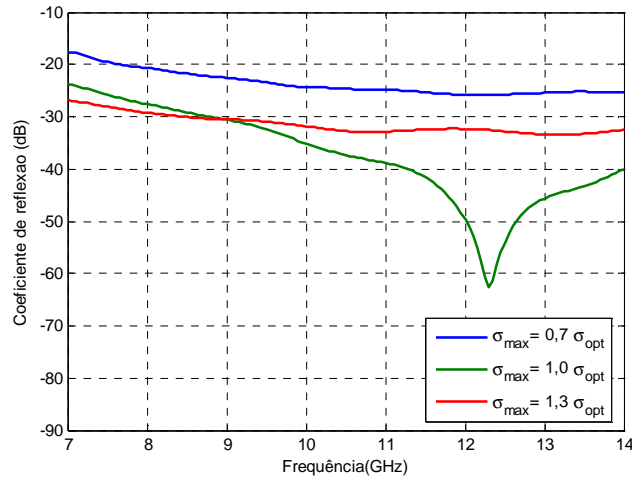


Figura 4.15 – Desempenho com a variação da condutividade máxima (σ_{max}) na distribuição, com $L/\Delta L = 2$, $m = 2$ e $k_{max} = 4$

Nota-se que o caso que apresenta melhor desempenho é aquele onde a condutividade σ_{max} é a dada pela equação (32), mostrando que a mesma é válida também para o método aqui apresentado.

E. Espessura do meio PML

A Figura 4.16 mostra o desempenho do meio PML em absorver a onda incidente ao se variar a sua espessura.

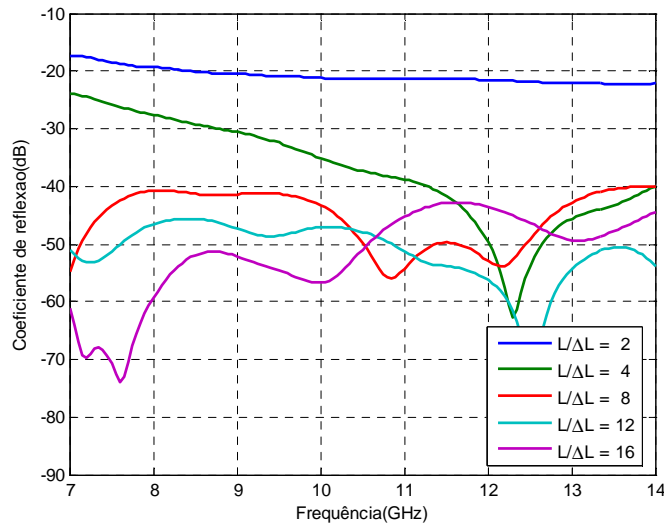


Figura 4.16 – Coeficiente de reflexão para os diferentes comprimentos do meio PML terminado com PEC $m=2$, $k_{max}=k_{opt}$ e $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$

Observa-se que, dentro da faixa de operação do guia (7 a 10GHz) a melhora do desempenho da absorção é grande, porém, a partir de 10 GHz, aumentar a espessura não melhora tanto o desempenho, ao passo que torna a simulação mais lenta e o desenho da estrutura mais trabalhoso.

F. Terminação do meio PML

A absorção da onda eletromagnética não é completa nos casos práticos de uso do meio PML. A onda percorre o meio PML e, por não ser completamente absorvida, atinge a condição de contorno externa ao PML, a terminação, e depois retorna à região computacional de interesse como mostrado na Figura 4.17.

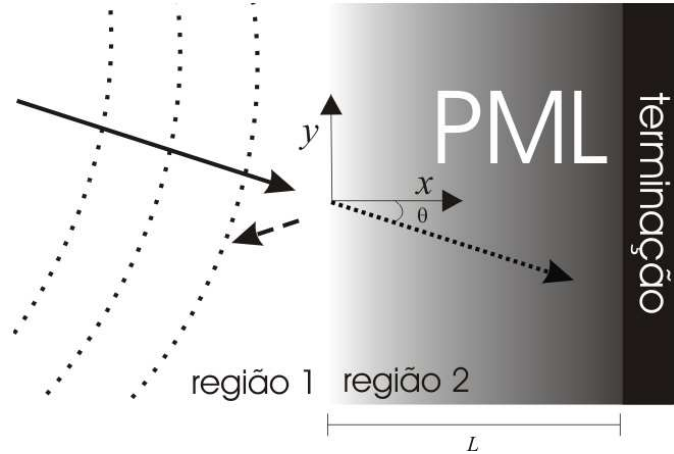


Figura 4.17 – Terminação do meio PML

A fim de verificar os efeitos da terminação no desempenho do meio PML foram realizadas simulações com condições de contorno ABC, PMC e PEC como terminação do meio PML. Os resultados são mostrados na Figura 4.18.

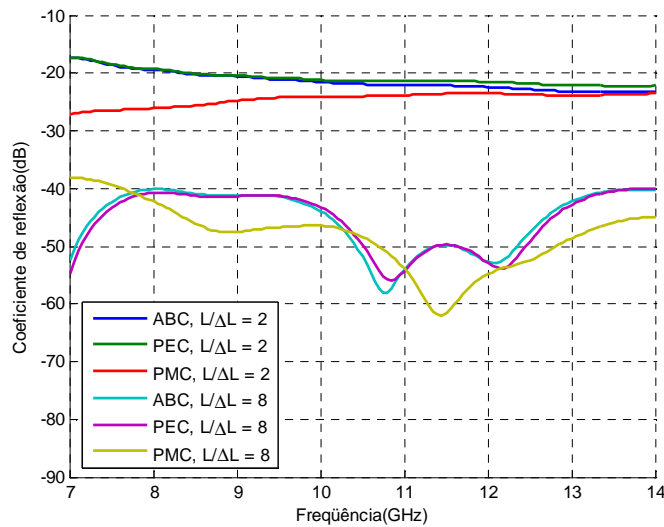


Figura 4.18 – $\Gamma \times f$ para as 3 terminações com $L/\Delta L = 2$ e 8 $m=2$, $k_{max}=k_{opt}$ e $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$

Nota-se que para menor espessura de PML, o uso de ABC melhora a resposta para maiores frequências (menores ângulos de incidência). Porém, o uso de PMC mostra desempenho ligeiramente melhor independente da espessura do PML.

G. Comparação com a condição ABC de primeira ordem

A Figura 4.19 mostra o desempenho do meio PML com as diversas espessuras contra a terminação somente em ABC de primeira ordem para a mesma estrutura. Percebe-se que o

PML apresenta melhor desempenho na absorção da onda eletromagnética. Para a espessura de 16 arestas o desempenho chega a 45dB melhor que o ABC.

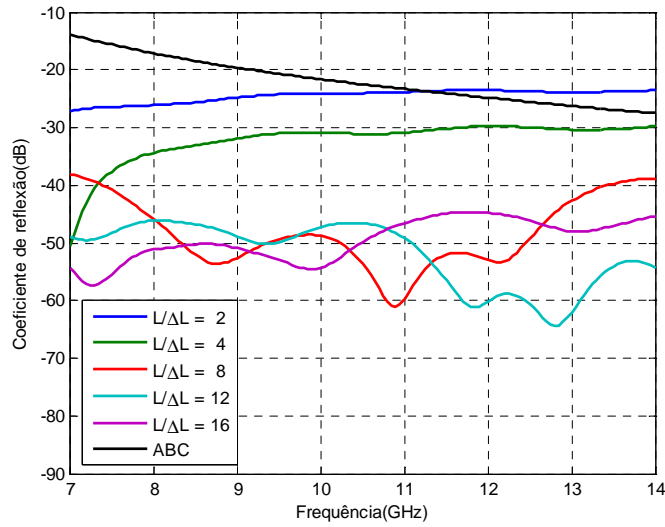


Figura 4.19 – Efeito do número de camadas no desempenho do meio PML, com $m = 2$, $k_{max} = k_{opt}$, $\sigma_{max} = \sigma_{opt}$, e comparativo com a terminação em ABC.

4.3 GUIA DE ONDA DUAL

Esse guia é obtido invertendo as condições de contorno PEC com PMC em relação ao guia metálico.

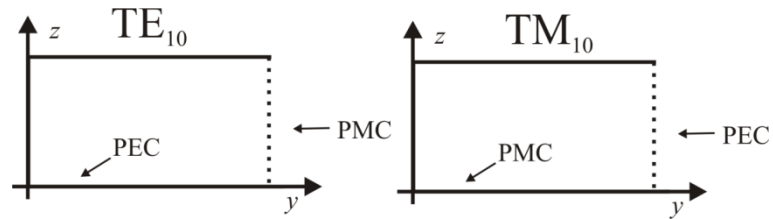


Figura 4.20 – Condições de contorno dos modos TE_{10} e TM_{10}

Além disso, deve-se modificar a forma de geração da onda eletromagnética a fim de produzir uma onda com campo magnético paralelo ao plano yz que excitará o modo TM_{10} como mostrado na Figura 4.21.

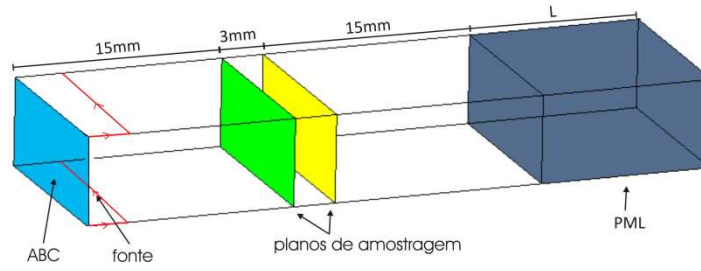


Figura 4.21 – Guia de onda dual simulado, posição da fonte alterado para excitar o modo TM_{10}

Neste modo, é o campo magnético que incide paralelamente à interface do meio PML, já o campo elétrico incide obliquamente à interface. A Figura 4.22 mostra o formato do campo elétrico do modo TE_{10} e campo magnético do modo TM_{10} do guia dual, ambos paralelos ao plano yz .

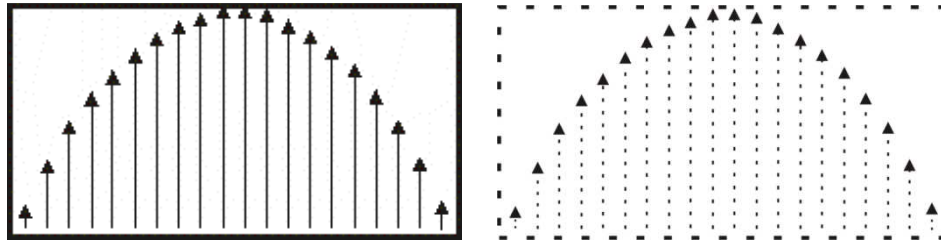


Figura 4.22 – Campo elétrico do guia metálico e campo magnético do guia dual paralelos ao plano yz

As características de corrente da fonte de excitação e o cálculo do coeficiente de reflexão são os mesmos utilizados na estrutura do guia metálico.

Há porém uma alteração na amostragem do campo elétrico devido a orientação do campo modo TM_{10} , logo, necessita-se de uma alteração na obtenção dos campos E_1 e E_2 utilizados para calcular o coeficiente de reflexão. Tais campos são dados pela equação

$$E_{1,2} = \frac{2}{ab} \int_{s_{1,2}} E_y \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) dy dz \quad (90)$$

4.3.1 RESULTADOS NUMÉRICOS

Foram realizadas as mesmas simulações do caso anterior, e os resultados obtidos apresentaram comportamento análogo aos anteriormente mostrado e portanto serão discutidos apenas os resultados conclusivos.

A. Obtenção do valor ótimo de $k_{m\acute{a}x}$

O método utilizado para obter o valor ótimo de $k_{m\acute{a}x}$ foi o mesmo utilizado para o modo TE_{10} , porém resultados diferentes foram obtidos. A Figura 4.23 mostra os k_{opt} para as diferentes configurações de m e $L/\Delta L$. Pode-se notar que há uma tendência menor de subida do valor de k_{opt} em relação ao aumento da espessura ($L/\Delta L$) comparado com o guia TM_{10} .

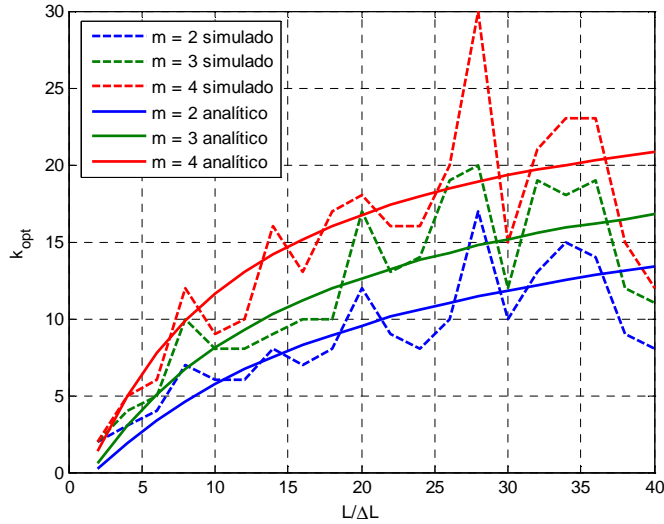


Figura 4.23 – $k_{opt} \times L/\Delta L$, simulados e aproximados por equação empírica

As curvas simuladas foram também ajustadas através de ferramentas matemáticas, levando à equação (91).

$$k_{opt} = \frac{(30 - 6m)L/\Delta L - 38}{2L/\Delta L - 5m + 30} \quad (91)$$

5 CONCLUSÃO

A limitação do espaço computacional é um elemento imprescindível na maioria dos métodos numéricos para a solução de fenômenos eletromagnéticos. Para se obter resultados corretos, muitas vezes é necessário o uso de condições de contorno que absorvam as ondas eletromagnéticas de forma eficiente. Com este intuito, foram desenvolvidas formulações de meios absorventes de alta eficiência, chamados genericamente de meios PML, nos quais a absorção das ondas se dá independentemente do ângulo de incidência da onda no meio.

Em função de os meios PML terem sido desenvolvidos para uso no método FDTD, pouco foi pesquisado sobre formulações similares aplicadas ao método FETD. Assim, este trabalho se propôs a apresentar a formulação de um meio PML eficiente e numericamente estável, uma vez que outras formulações aplicadas ao FETD apresentam instabilidade numérica em certas condições.

A formulação de um meio PML uniaxial, baseada nos estudos realizados com modelos fisicamente realizáveis já estudados no FDTD foi apresentada. Nesta formulação, porém, foram utilizados elementos novos, como o uso de pólos e resíduos, sendo que a manutenção dos pólos fixos ajudaram a melhorar a velocidade de processamento do método. Isto foi conseguido com a utilização da relação constante entre a condutividade e o fator de escalonamento de coordenada.

Esta formulação foi testada com a utilização de guias de ondas retangulares, pois a geração de ondas com diversos ângulos de incidência é facilitada desta forma. Foram utilizados duas configurações de guia, um metálico e outro teórico, dual ao primeiro, a fim de investigar os efeitos da orientação do campo elétrico no desempenho do meio PML como absorvedor de ondas eletromagnéticas. Foram realizadas simulações computacionais utilizando a formulação proposta nos guias de ondas.

Nas simulações, os diversos parâmetros presentes na formulação foram explorados a fim de se verificar a validade dos parâmetros no método FETD. Um dos parâmetros que apresentou diferença ao se comparar com o método FDTD foi o grau do polinômio de gradação, na literatura é apresentado que valores de $3 \leq m \leq 4$ seriam ótimos, porém, nas simulações aqui realizadas, $m = 2$ apresentou melhor resultado.

Devido à introdução do fator de escalonamento de coordenada, que melhora o desempenho da formulação na absorção de ondas com ângulos de incidência próximos de 90° , foi necessário investigar a influência deste no desempenho da formulação, o que levou a

obtenção de equações empíricas para estimar o valor do fator de acordo com a espessura do meio PML, bem como o grau do polinômio de gradação, facilitando assim a utilização prática da formulação em simulações no FETD.

Em nenhuma das simulações realizadas foi encontrada instabilidade numérica, mostrando que método FETD é incondicionalmente estável também após a inclusão da presente formulação. A formulação também apresentou desempenho computacional similar ao método original, tendo ficado pouco mais lenta em alguns casos devido ao aumento do número máximo de iterações do método do gradiente conjugado, necessárias para solução da equação matricial da onda.

Assim, o objetivo do trabalho foi alcançado. Desenvolveu-se uma técnica eficaz para o aprimoramento do método FETD na absorção de ondas eletromagnéticas com ângulo de incidência arbitrário. Em contraste com a maioria das técnicas existentes para este fim, a formulação aqui proposta mostrou-se numericamente estável, mesmo após milhares de iterações. Mostrou-se também econômica em termos de aproveitamento computacional.

PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS

- 1) Facilitar o uso da formulação sem que haja a necessidade de se desenhar o meio PML na estrutura, como é feito no uso das outras condições de contorno, onde a condição é aplicada a uma superfície e seus parâmetros são ajustados separadamente, agilizando o desenho da estrutura.
- 2) Generalizar a formulação para que possa ser utilizada independentemente da direção de propagação da onda, podendo assim ser utilizado em superfícies curvas. Um método baseado em rotação de coordenadas foi proposto para este fim [24], porém não foi implementado no método FETD.

REFERÊNCIAS

- [1] A. TAFLOVE and S. C. HAQUESS, *Computational Electrodynamics, The Finite Difference Time Domain Method*, 2nd ed. Artech House., 2000.
- [2] K. S. Yee, J. S. Chen, and A. H. Chang, "Conformal finite difference time domain (FDTD) with overlapping grids," in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. V. 40, 1992, pp. 1068-1075.
- [3] J. P. BERENGER, "A perfect matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *J. Computational Physics*, Vol. 114, pp. 185-200. 1994.
- [4] Z. S. SACKS, D. M. KINGSLAND, R. LEE, and J. F. LEE, A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 1995, vol. 43.
- [5] E. ABENIUS, F. EDELVIK, and C. JOHANSSON, "Waveguide Truncation Using UPML in the Finite-Element Time-Domain Method". *Technical Report 2005-026*, Department of Information Technology, Uppsala University. Suécia, 2005.
- [6] W. A. J. ARTUZI, "Improving the Newmark time integration scheme in finite element time domain methods" - *IEEE Transactions on Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 15, pp. 898-900. December 2005.
- [7] T. RYLANDER and J.-M. JIN, Perfectly matched layer in three dimensions for the time-domain finite element method applied to radiation problems. *IEEE Trans. Antennas Propagat*, April 2005.
- [8] D. JIAO, J.-M. JIM, E. MICHIELSEN, and D. RILEY, Time-domain finite-element simulation of three-dimensional scattering and radiation problems using perfectly matched layers. *IEEE Trans. Antennas Propagat*. February 2003.
- [9] J. Y. WU, D. M. KINGSLAND, J. F. LEE, and R. LEE, A comparison of anisotropic PML to berenger's PML and its application to the finite-element method for EM scattering. *IEEE Trans. Antennas Propagat*. January 1997.
- [10] R. W. ZIOLKOWSKI, "Time-derivative Lorentz materials and their utilization as electromagnetic absorbers". *Physical Review E*, 1997, vol. 55.
- [11] J. P. BERENGER, "Improved PML for the FDTD solution of wave-structure interaction problems". *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 1997, vol. 45.

- [12] J. P. BERENGER, "*Perfect matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems*". IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1996, vol. 51.
- [13] S. D. GEDNEY, "*An anisotropic perfectly matched layer absorbing media for the truncation of FDTD lattices*". IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1996, vol. 44.
- [14] Z. ., WU and J. FANG, "*High performance PML algorithms*". IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1996, vol. 6.
- [15] J. P. WEBB, "*Edge Elements and What They Can Do For You*". IEEE Transactions on Magnetics, March 1993, vol. 29.
- [16] S. D. GEDNEY, "*An Unconditionally Stable Finite-Element Time-Domain Solution of The Vector Wave equation*". IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1995, vol. 5.
- [17] A. TAFLOVE and M. E. BRODWIN, "'Numerical Solutions of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations'", vol. MTT-23, pp. 623-630, Ago. 1975.
- [18] G. K. PETRAVIC and M. PETRAVIC, "*A Program Generator for Incomplete Cholesky Conjugate Gradient (ICCG) Method with a Symmetrizing Preprocessor*". Comput. Phys. Commun., 1981, vol. 22.
- [19] W. A. J. ARTUZI, "*An unconditionally stable FETD method using tetrahedral cells*" – Universidade Federal do Paraná – IMOC/SBMO. 2004.
- [20] K. S. KUNZ and R. J. LUEBBERS, "*The Finite Difference time Domain Method for Eletromagnetics*". New York: CRC Press LLC, 1993.
- [21] T. M. N. VERÁSTEGUI and W. A. J. ARTUZI, "*Simulação Eletrodinâmica da Propagação de Modos entre Planos de Referência em Placas de Circuito Impresso*". Departamento de Engenharia Elétrica UFPR, MOMAG, 2006.
- [22] MATLAB. <http://www.mathworks.com/> - Agosto 2008.
- [23] GID – Geometry and Data. <http://gid.cimne.upc.es> - Agosto 2008.
- [24] X. Xu and R. Sloan, "Arbitrarily oriented perfectly matched layer in the frequencydomain," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, pp. 461-463, Mar. 2000.
- [25] J. P. BERENGER, "*Numerical reflection of evanescent waves from perfectly matched layers*". Montreal, Canadá: Proc. IEEE Antennas and Propagat. Soc. Int. Symposium, 1997, vol. 3.

- [26] J. P. BERENGER, "A perfect matched layer for free-space simulations in finite-difference computer codes". *Annales des Telecommunications*, 1996, vol. 51.
- [27] S. e. a. CHANG, "A Global Finite-Element Time-Domain Analysis of Active Nonlinear Microwave Circuits". *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1999, vol. 47.
- [28] J. F. LEE, "WETD - A Finite Element Time Domain Approach for Solving Maxwell's Equations". *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 1994, vol. 4.
- [29] N. K. MADSEN, "Divergence Preserving Discrete Surface Integral Methods for Maxwell's Curl Equations Using Non-orthogonal Unstructured Grids". *Journal of Computational Physics*, 1995, vol. 119.
- [30] H. TSAI, Y. WANG, and T. ITOH, "An Unconditionally Stable Extend (USE) Finite-Element Time-Domain Solution of Active Nonlinear Microwave Circuits Using Perfectly Matched Layers". *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 2000, vol. 50.
- [31] K. S. YEE, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1966, vol. 14.
- [32] S. GEDNEY, "The perfectly matched layer absorbing medium," in *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, 1998, ch. Capítulo 5.
- [33] J. P. BERENGER, "Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *J. Computational Physics*, 1996, vol. 127.
- [34] S. D. GEDNEY, F. S. LANSING, and D. L. RASCOE, "Full Wave Analysis of Microwave Monolithic Circuit Devices Using Generalized Yee Algorithm Based on Unstructured Grid". *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1996, vol. 44.
- [35] R. L. LEE and N. K. MADSEN, "A Mixed Finite Element Formulation for Maxwell's Equations in the Time Domain". *Journal of Computational Physics*, 1990, vol. 88.
- [36] A. V. OPPENHEIM and R. W. SCHAFER, "Digital Signal Processing". Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975.
- [37] C. E. REUTER, R. M. JOSEPH, E. T. THIELE, D. S. KATZ, and A. TAFLOVE, "Ultrawideband absorbing boundary condition for termination of waveguiding structures in FDTD simulations," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. 1995, vol. 10.
- [38] D. K. SUN, J. F. LEE, and Z. CENDES, "The Transfinite Element Time Domain

Method". IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 2003, vol. 2003.

- [39] P. B. :. MONK, *A Mixed Method for Approximating Maxwell's Equations*. 1991, vol. 28.
- [40] I. CHIAMENTI, *Inclusão De Quadripólos Concentrados Em Simulação Eletromagnética Por Elementos Finitos No Domínio Do Tempo*, dissertação. Curitiba, Brasil: UFPR - Universidade Federal do Paraná, 2008.